

1. $\frac{1 + i^3 + i^6}{1 + i^2 + i^4}$ 의 값은?

① i

② $-i$

③ $-\frac{i}{2}$

④ $\frac{1-i}{2}$

⑤ $\frac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1 + i^3 + i^6}{1 + i^2 + i^4} = \frac{1 + (-i) + (-1)}{1 + (-1) + 1} = \frac{-i}{1} = -i$$

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < 1$

② $-1 < m < 1$

③ $m < -1$ 또는 $m > 1$

④ $m > 1$

⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$$D/4 = 1 - m < 0$$

$$\therefore m > 1$$

3. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

두근의 합 : 3, 두근의 곱 : 1

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 7\end{aligned}$$

4. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a , b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$$1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$$

$$3 + (a-6)i = (b-2) - ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = b-2, a-6 = -a$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$b = 5, a = 3$$

$$\therefore a + b = 8$$

5. $\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $\frac{6}{5}$

② 2

③ $\frac{8}{5}$

④ $\frac{8}{3}$

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2-i)^2 + (2+i)^2}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{3+3}{5} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

6. 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4} = (k - a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$$

$$\therefore -2ka - b + 2 = 0$$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k 에 대한 항등식이다.

$$a = 0, b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

7. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x = k, y = k^2 + k + 2$

② $x = k, y = k^2 - 3k + 4$

③ $x = 2k, y = k^2 + 4k + 1$

④ $x = 2k, y = k^2 - 5k + 7$

⑤ $x = 3k, y = 2k^2 - 3k + 6$

해설

$y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$
 $= (x - 2k)^2 + k^2 - 5k + 7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때
최솟값 $k^2 - 5k + 7$ 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
 $x = 2k, y = k^2 - 5k + 7$

8. $x = 0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -2(x + 1)^2 - 4$

② $y = (x - 2)^2 - 3$

③ $y = -2(x - 1)^2 + 3$

④ $y = -(x + 1)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(0, -1)$ 이므로 $y = ax^2 - 1$

$(2, -3)$ 을 대입하면 $-3 = 4a - 1$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$$

9. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 직선 $y = 0$ 과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 x 축 ($y = 0$)과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 12 > 0 \text{에서}$$

$$a < -2\sqrt{3} \text{ 또는 } a > 2\sqrt{3}$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

10. 두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y 절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 (t, t^2) 으로 놓으면
 $y' = 2x$ 이므로 $y'_{x=t} = 2t$ 는 접선의 기울기이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots \textcircled{1}$$

①이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에도 접하므로

$$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5 \text{ 에서}$$

$$x^2 + 2(t-1)x + (5-t^2) = 0 \cdots \textcircled{2}$$

②의 판별식 $\frac{D}{4} = 0$ 이므로

$$(t-1)^2 - (5-t^2) = 0 \text{ 에서}$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = -1, 2$$

①에서

$$t = -1 \text{ 일 때, } y = -2x - 1$$

$$t = 2 \text{ 일 때, } y = 4x - 4$$

따라서 두 y 절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

11. $a - 1 \leq x \leq a + 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4$$

이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x 의 값의 범위에 속하므로
 $x = a$ 일 때 최솟값, $x = a + 4$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$\text{즉, } f(a + 4) = (a + 4)^2 - 2a(a + 4) + 4 = 4$$

$$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 8a + 4 = 4$$

$$a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 \quad (a > 0)$$

12. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50

② 62

③ 64

④ 79

⑤ 83

해설

두 수를 각각 x , $16 - x$ 라고 하면

$$\begin{aligned}y &= x(16 - x) \\ &= -x^2 + 16x \\ &= -(x^2 - 16x + 64 - 64) \\ &= -(x - 8)^2 + 64\end{aligned}$$

$x = 8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

14. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + (1 - 2a)x^2 + a(a - 2)x + a^2 = 0$ 의 근이 오직 하나 뿐일 때, 실수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + (1 - 2a)x^2 + a(a - 2)x + a^2$ 으로 놓으면

$$f(a) = a^3 + (1 - 2a) \cdot a^2 + a(a - 2) \cdot a + a^2 = 0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$(x - a)^2(x + 1) = 0$$

주어진 방정식의 근이 오직 하나뿐이므로 $x = -1$ 을 삼중근으로 갖는다.

$$\therefore a = -1$$

15. 삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15

② 16

③ -16

④ 17

⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = 6, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7, \quad \alpha\beta\gamma = 5$$

$$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$

해설

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0 \text{이므로}$$

$$f(1) = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$

16. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

17. 두 다항식 $f(x) = x^3 - 5, g(x) = x^3 + 3x + 1$ 에 대하여 $f(x) = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$ 의 값은?

① 350

② 351

③ 352

④ 353

⑤ 354

해설

$f(x) = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라고 하면 $\alpha^3 = 5, \beta^3 = 5, \gamma^3 = 5$ 이다.

$$g(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha + 1 = 3\alpha + 6, \quad g(\beta) = \beta^3 + 3\beta + 1 = 3\beta + 6,$$

$$g(\gamma) = \gamma^3 + 3\gamma + 1 = 3\gamma + 6 \quad g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$$

$$= (3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6) = 351 \quad (\because \alpha+\beta+\gamma = 0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = 5)$$

18. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나) 를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.

(나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 1680$

② (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 3360$

③ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

④ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 3360$

⑤ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

해설

시속 30km \Rightarrow 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60} + 3 + \frac{y}{500} = 10$, $\frac{x}{60} + \frac{y}{500} = 7$

$\therefore 25x + 3y = 10500$

(나) $\frac{x+y}{60} = 28$

$\therefore x + y = 1680$

19. 복소수 z 가 $z + |z| = 2 + 8i$ 를 만족시킬 때, $|z|^2$ 의 값은? (단, $z = a + bi$ (a, b 는 실수)일 때, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.)

① 68

② 100

③ 169

④ 208

⑤ 289

해설

$z = a + bi$ 라 놓자.

$$z + |z| = 2 + 8i,$$

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$$

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2, \quad b = 8$$

$$a + \sqrt{a^2 + 64} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a \quad \text{양변제곱하면,}$$

$$a^2 + 64 = (2 - a)^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$4a = -60, \quad a = -15$$

$$\therefore |z|^2 = a^2 + b^2 = 225 + 64 = 289$$

20. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{5}{9}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$$

$$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2 \text{가}$$

x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$$

$$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$$

$$= (1-4a)y^2 - 2y + 9 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$$

$$\therefore 1 - 9 + 36a = 0$$

$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

21. 이차방정식 $x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = 3k - 11$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= k^2 - 12k + 44 = (k - 6)^2 + 8$$

따라서 $k = 6$ 일 때 $(\alpha - \beta)^2$ 는 최소

해설

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \text{이므로}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{k^2 - 12k + 44}}{1}$$

$\therefore k^2 - 12k + 44$ 가 최소이려면 $k = 6$

22. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 a , 모든 허근의 곱을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5

② 3

③ $\frac{3}{2}$

④ -2

⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을
 x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$$

$$\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

$$\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$ 은 허근을 갖고,

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 실근을 가지므로

실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$ 이다.

$$\therefore a + b = 4$$

23. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, $y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$

② $x^7 + y^7 = 1$

③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$

⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 는 } x^2 - x + 1 = 0 \text{ 의 근이다}$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = y^3 = -1, \quad x + y = 1, \quad xy = 1$$

$$\text{① : } x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$$

$$\text{② : } x^7 + y^7 = (x^3)^2x + (y^3)^2y = x + y = 1$$

$$\text{③ : } x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$$

$$\text{④ : } x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$$

$$\text{⑤ : } x^{13} + y^{13} = (x^3)^4x + (y^3)^4y = x + y = 1$$

24. 방정식 $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

준식을 y 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$5y^2 + 2(x+6)y + (2x^2 + 6x + 9) = 0$$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (x+6)^2 - 5(2x^2 + 6x + 9) \\ &= -9x^2 - 18x - 9 = -9(x+1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2 = 0$

$$x+1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

준식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$2 - 2y + 5y^2 - 6 + 12y + 9 = 0$$

$$5y^2 + 10y + 5 = 0$$

$$5(y+1)^2 = 0$$

$$\therefore y = -1$$

$$\therefore x + y = -2$$

25. 방정식 $x^2 - 12x + 35 = 3^y$ 을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 의 값을 구하면?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x^2 - 12x + 35 = (x - 6)^2 - 1 = 3^y$ 에서 $x - 6 = t$ 라 하면

$$t^2 - 1 = 3^y, \quad (t - 1)(t + 1) = 3^y$$

따라서, $t + 1, t - 1$ 은 3^n 꼴이고 차가 2이므로 $y = 1$ 이다.

$$(t + 1, t - 1) = (3, 1), (-1, -3)$$

$$\therefore t = 2, -2 \quad \therefore (x, y) = (8, 1), (4, 1)$$

$$\therefore x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 14$$