

1. 방정식 $2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 에서
 $x^2 + 4xy + 4y^2 + x^2 + 2x + 1 = 0,$
 $(x + 2y)^2 + (x + 1)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로 $x + 2y = 0 \dots\dots ①, x + 1 = 0 \dots\dots ②$
①, ②에서 $x = -1, y = \frac{1}{2}$
 $\therefore x + y = -\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면 $2x^2 + 2(2y + 1)x + (4y^2 + 1) = 0 \dots\dots ①$
 x 가 실수이므로 $\frac{D}{4} = (2y + 1)^2 - 2(4y^2 + 1) \geq 0$
 $\therefore (2y - 1)^2 \leq 0$
그런데 $2y - 1$ 이 실수이므로 $2y - 1 = 0$
 $\therefore y = \frac{1}{2} \dots\dots ②$
②를 ①에 대입하면
 $2x^2 + 4x + 2 = 0, (x + 1)^2 = 0$
 $\therefore x = -1 \dots\dots ③$
②, ③에서 $x + y = -\frac{1}{2}$

2. 방정식 $x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ 에서
 $x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$
 $(x + 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0$
 $x + 2y, y - 1$ 은 실수이므로 $x + 2y = 0, y - 1 = 0$
 $\therefore y = 1, x = -2y = -2$
 $\therefore x + y = -1$

3. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$

이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$

이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{A}},$

$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{B}}$ 에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 $\textcircled{\text{A}}$ 에 대입하면 $x^2 = 1$

따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2, x = -1$ 일 때 $y = -2$

그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

4. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + (2y - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ &= (x - 2y + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ &\therefore x - 2y + 1 = 0, y - 2 = 0 \text{ 이므로} \\ &y = 2, x - 4 + 1 = 0 \quad \therefore x = 3 \\ &\text{따라서 } x + y = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

5. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 0$

x, y 는 실수이므로 $x^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$

따라서, $x = 0, y - 1 = 0$ 이므로 $x = 0, y = 1$

$\therefore x + y = 0 + 1 = 1$

6. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 에서
 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$
 x, y 는 실수이므로 $x = -1, y = 2$
 $\therefore x + y = -1 + 2 = 1$

7. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 와 y 의 곱은?

① -2

② 3

③ 4

④ 8

⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$
 $(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$
 $x = 2y, x = 4$
 $\therefore x = 4, y = 2 \quad \therefore xy = 8$

8. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
 $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
 $(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로 $x + y = 0, x - 2 = 0$
 $\therefore x = 2, y = -2$
 $\therefore xy = -4$

9. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

10. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x=y \\ y=\delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$$

11. 방정식 $2x + 5y = 84$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 의 해 중에서 x 의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots\text{㉠}$$

㉠에서 y 가 양의 정수이므로 $42 - x$ 가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$ 의 최댓값은 37

12. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a 는 -10 이상 -2 이하이다.

② a 는 -2 이상 6 이하이다.

③ a 는 6 이상이다.

④ a 는 0 이하이다.

⑤ a 는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β 라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 2$$

이 두 식에서 a 를 소거하면

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 이 정수이므로

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = 0$$

$$\therefore a = 6, -2$$

13. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 일 때, xy 의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0 \text{ 을}$$

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, x 는 실수이므로 $\textcircled{1}$ 은 실근을 가져야 한다.

$$D = (y+1)^2 - 2(y^2 - 2y + 5) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad (y-3)^2 \leq 0$$

$$\therefore y = 3$$

$y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2x^2 + 8x + 8 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \quad \therefore xy = (-2) \cdot 3 = -6$$

14. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

- ① $x = 2, y = 4$ ② $x = 4, y = 2$ ③ $x = -1, y = 2$
④ $x = 2, y = -1$ ⑤ $x = -2, y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$$2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4} \geq 0$ 에서

$$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$$

$$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$$

$$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$$

$$6(y-2)^2 \leq 0 \quad \therefore y = 2 \quad (\because y \text{ 는 실수})$$

$y = 2$ 를 ①에 대입하면,

$$2x^2 - 16x + 32 = 0, \quad 2(x-4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 4$$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + 6 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?
- ① -1 ② 3 ③ $-1, -3$
④ $1, 3$ ⑤ $-3, 1$

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로 $D/4 = (a + 2)^2 - 2a^2 - 6 \geq 0$ 에서 $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$
그런데 a 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $a = 1, 2, 3$
i) $a = 1$ 일 때 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 두 근은
 $x = 2, 4$ (조건을 만족)
ii) $a = 2$ 일 때 $x^2 - 8x + 14 = 0$ 의 두 근은
 $x = 4 \pm \sqrt{2}$ (조건에 위배)
iii) $a = 3$ 일 때 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 의 두 근은
 $x = 4, 6$ (조건을 만족)
i), ii), iii)에서 $a = 1, 3$

16. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{21}$ (단, $x < y$)을 만족하는 양의 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x + y$ 의 최댓값을 구하면?

① 484 ② 192 ③ 112 ④ 100 ⑤ 548

해설

$21(x + y) = xy, \quad xy - 21(x + y) = 0$
 $\therefore (x - 21)(y - 21) = 21^2 = 3^2 \times 7^2$
 $21x = (x - 21)y$ 이고 $y > x > 0$ 이므로
 $y - 21 > x - 21 > 0$
 $\therefore (x - 21, y - 21)$
 $= (1, 441), (3, 147), (7, 63), (9, 49)$
 $\therefore (x, y)$
 $= (22, 462), (24, 168), (28, 84), (30, 70)$
 $\therefore x + y$ 의 최댓값은 $22 + 462 = 484$

17. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여 xy 의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$$xy + 4x - 2y - 11 = 0 \text{에서 } (x - 2)(y + 4) = 3$$

x, y 가 정수이므로

$$(x - 2, y + 4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$$

$$\therefore (x, y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$$

$$\therefore xy = -3, -7, -15, 5$$

18. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

- ① 1

② 2

③ 3
- ④ 4

⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$
 $(m - 4)(n - 2) = 8$
 $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1$ 이므로
 $(m, n) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$
 $\therefore$ 4쌍의 (m, n) 이 존재한다.

19. $xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 에서

$x(y - 3) - 3(y - 3) - 5 = 0, (x - 3)y - 3 = 5$

$x \geq 1, y \geq 1$ 이므로 $x - 3 \geq -2, y - 3 \geq -2$

(i) $x - 3 = 1, y - 3 = 5$ 일 때, $x = 4, y = 8$

(ii) $x - 3 = 5, y - 3 = 1$ 일 때, $x = 8, y = 4$

따라서, 구하는 값은 $x + y = 4 + 8 = 8 + 4 = 12$

20. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수의 값이 아닌 것은?

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

- ① 5
- ② 7
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 13

해설

$x^2-3xy+2y^2 = -6$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y) = -6$ 이 때, x, y 는 양의 정수이므로 $x-y, x-2y$ 도 정수이고 $x-y > x-2y$ 이다.

따라서, $x-y, x-2y$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

그러므로 각각을 연립하여 풀면 구하는 x, y 의 값은

$$\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{또는}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases}$$

21. 두 방정식 $\begin{cases} ab+bc=44 \\ ac+bc=23 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 양의 정수쌍 (a, b, c) 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$c(a+b)=23$ 에서 23은 소수이므로, 두 인수는 1, 23이다.
 a, b 는 양의 정수이므로, $a+b>1$ 이고 $c=1$, $a+b=23$
이것을 처음 식에 대입하면
 $a(23-a)+(23-a)=44$, $a^2-22a+21=0$
 $\therefore (a, b) = (1, 22), (21, 2)$ 그러므로 만족하는 양의 정수쌍
 (a, b, c) 는
 $(1, 22, 1), (21, 2, 1)$ 의 2개이다.

22. $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$

$m = -1, 7$

23. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

24. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4k + 4 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

- ① -1 ② 7 ③ 6 ④ -6 ⑤ 1

해설

두 근을 α, β 라 하면 ($\alpha \geq \beta$)
 $\alpha + \beta = -2(k-1) \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha\beta = 4k + 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = 8, (\alpha+2)(\beta+2) = 12, \alpha\beta = -10, 0, 2, 42, 32, 30$
그런데 α, β 가 정수이므로 $\textcircled{2}$ 에서
 $k = \frac{\alpha\beta - 4}{4}$
따라서 k 의 정수값은 $-1, 7$
 $\therefore k$ 의 값들의 합은 6