1. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1\cdots㉠ \\ x^2+y^2=5\cdots㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

4. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y를 구하여 x^2-y^2의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 -12

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$를

㉡식에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=20$, $2x^2-4x+4-20=0$,

$x^2-2x-8=0$, $(x-4)(x+2)=0$

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

$\therefore$ $x^2-y^2=16-4=12$ 또는 $x^2-y^2=4-16=-12$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 x값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$

④ $-2\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y) = 0$

㉠ $x = 2y$일 때

$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$

$y^2 = 2$, $y = \pm\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$

$x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$

㉡ $x = -y$일 때

$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10$, $y^2 = 5$, $y = \pm\sqrt{5}$

$x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$

$x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

6. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x 값을 모두 더하면?

① 0 ② 15 ③ 10 ④ −10 ⑤ −15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$ 에 $3x^2 + y = 6$ 을 대입하면

$9x^2 - (-3x^2 + 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\ \pm 2$

$\therefore x$ 의 합은 $+1 - 1 + 2 - 1 = 0$

7. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 5x^2-y^2=4 \end{cases}$ 의 근을 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots ① \\ 5x^2-y^2=4 & \cdots ② \end{cases}$

①식을 인수분해하면

$(2x-y)(x-y)=0 \quad \therefore\ y=2x,\ y=x$

②식에 대입하면

$y=2x$일 때 $5x^2-(2x)^2=4$, $x^2=4$, $x=\pm2$, $y=\pm4$

$y=x$일 때 $5x^2-x^2=4$, $4x^2=4$ $x^2=1$, $x=\pm1$, $y=\pm1$

$\therefore \alpha+\beta=6,\ -6,\ 2,\ -2$

$\therefore \alpha+\beta$ 의 최댓값은 6

8. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5},\ y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$에서

$(x - y)(x + 2y) = 0$

i) $x = y$일 때

$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x = -2y$일 때

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5,\ y = \pm\sqrt{5},\ x = \mp 2\sqrt{5}$ (복호동순)

$\therefore$ 구하는 해는$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),$

$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5}),\ (2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

9. 두 방정식 $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 모두 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 :

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0$ 또는 1

(ii) $x = 2y$ 일 때 :

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0$ 또는 $-\frac{1}{3}$

$\therefore (x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

10. 두 방정식 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 없다.　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases}(x+y-1)(x-y-1)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $y=\pm(x-1)$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-(x-1)^2=0$, $2x-1=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$, ㉢에서 $y=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 2개

11. $x=\alpha,\ y=\beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 \end{cases}$$ 의 해일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 & \cdots ① \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ①$\times 3-$②$\times 2$하면

$x^2-3xy+2y^2=0,\ (x-2y)(x-y)=0,$

$x=2y\ or\ x=y$

$x=2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2-2y^2-2y^2=-2,\ 0=-2$불능

$x=y$를 ①식에 대입하면

$y^2-y^2-2y^2=-2$

$y^2=1,\ y\pm 1,\ x\pm 1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=1+1=2$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

13. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(ⅰ) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ⅱ) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(ⅰ), (ⅱ)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

14. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 4개
④ 8개　　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$
$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$
여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$
(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,
$xy = 1$, $x = y$
$\therefore$ $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$
(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면
$xy = -1$, $x = -y$
$\therefore$ $(x, y, z) = (1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$
(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z)는 모두 4개이다.

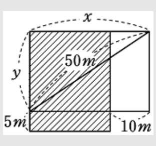
15. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x - 10)(y + 5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y + 20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

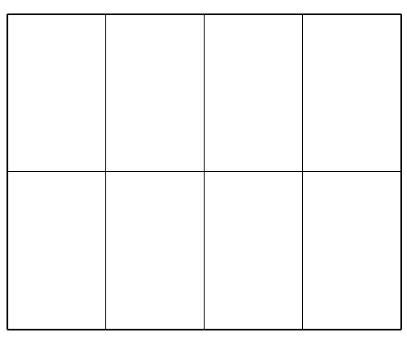
$(y - 14)(y + 30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

16. 학교운동장에 길이가 70 m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 80 m^2 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10 m 이하이다.)



① 16 m ② 17 m ③ 18 m ④ 19 m ⑤ 20 m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.
$3x + 5y = 70$
$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10,\ y = 8$
$\therefore$ 가로+세로$= 18$

17. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ±1 ② ±3 ③ ±5 ④ ±7 ⑤ ±9

해설

$\begin{cases} 2x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$ 이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\left(k^2-5\right)=0$

$-k^2+25=0,\ k^2=25$

$\therefore\ k \pm 5$

18. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0$, $x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$㉠

$t^2+at+1=0\cdots$㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$: $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

21. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$ 의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$　③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$　⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8 에서 $x^2-11xy-26y^2=0,\ (x+2y)(x-13y)=0$
$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢
$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm 1,\ x=\mp 2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2=1$
$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

22. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x + y = u,\ xy = v$ 라 하면

$$\begin{cases} u + v = 5 & \cdots ㉠ \\ u^2 - v = 7 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2 - (5 - u) = 7$

$u^2 + u - 12 = 0$

$(u + 4)(u - 3) = 0$

$\therefore\ u = -4$ 또는 $u = 3$

(ⅰ) $u = -4,\ v = 9$, 즉 $x + y = -4,\ xy = 9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2 + 4t + 9 = 0$ 의 두 근이므로 $t = -2 \pm \sqrt{5}i$

따라서, $x = -2 \pm \sqrt{5}i,\ y = -2 \mp \sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)

$(-2 + \sqrt{5}i,\ -2 - \sqrt{5}i),\ (-2 - \sqrt{5}i,\ -2 + \sqrt{5}i)$

(ⅱ) $u = 3,\ v = 2$, 즉 $x + y = 3,\ xy = 2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 두 근이므로

$(t - 1)(t - 2) = 0$

$\therefore\ t = 1$ 또는 $t = 2$

따라서, $x = 1,\ y = 2$ 또는 $x = 2,\ y = 1$ 이므로 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(ⅰ), (ⅱ) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4 개이다

23. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

공통근이 α이므로
$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$
$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$
$k=0$ 또는 $\alpha=1$
$k=0$이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ \alpha=1$을 대입하면
$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\dfrac{2}{3}$
$\therefore\ 3k+\alpha=-1$