1. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면
$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로
$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$
$(2-k)\alpha+(k-2)=0$
따라서 $\alpha=1$ 이고
$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

2. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0$, $x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$　② $-\frac{7}{2}$　③ $-\frac{5}{2}$　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$㉠

$t^2+at+1=0\cdots$㉡

㉠ − ㉡ × 2 : $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

3. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$

4. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2006}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① -1 ② 1 ③ $-i$ ④ i ⑤ 2002

해설

$\dfrac{1+i}{1-i}$ 을 유리화 하면 $\dfrac{1+i}{1-i}=i$

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2006}=i^{2006}=(i^4)^{501}i^2=-1$

5. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ 을 간단히 하면? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2} = \frac{-2i}{2} = -i$, $i^4 = 1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100} &= \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} \\ &= ((i)^4)^{12} \cdot i^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

6. 복소수 z에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$은 양의 정수인 z의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$

$m = 1, n = 2, z = i - 1$

$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$

$m = 1, n = 4, z = i + 1$

$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i - 1$	0	$i + 1$
2	$-1 + i$	-2	$-1 - i$	0
3	0	$-i - 1$	$-2i$	$-i + 1$
4	$1 + i$	0	$1 - i$	2

$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$

$\therefore$ 9 개

7. $f(n) = (n+1)i^n - ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2 = -1$ 이다.)

① $f(n+1) - f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1) - f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k가 정수일 때 $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i$,
$i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$이므로
$f(1) = 2i + 1$,$f(2) = -3 + 2i$, $f(3) = -4i - 3$, $f(4) = 5 - 4i$
$f(5) = 6i + 5$,$f(6) = -7 + 6i$, $f(7) = -8i - 7$,$f(8) = 9 - 8i$
① $f(3) - f(2) = -6i$ (거짓)
② $f(2) - f(1) = -4$ (거짓)
③ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -4i$ (거짓)
④ $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 4$ (거짓)
⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$

$$= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\} + \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\}$$
$$= -4i - 4i = -8i \text{ (참)}$$

8. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y-4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

9. 이차방정식 $3x^2 - 2x - 2a - 1 = 0$ 이 실근을 가질 실수 a 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \geq -\frac{2}{3}$

해설

$3x^2 - 2x - (2a + 1) = 0$ 에서

x 의 일차항의 계수가 $2b'$ 의 꼴이므로

$\frac{D}{4} = 1 + 3(2a + 1) \geq 0$

정리하면

$6a \geq -4$

$\therefore \ a \geq -\frac{2}{3}$

10. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\{1+(a+b)^2\}$

$\quad =1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2 \geq 0$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1 \leq 0$

즉, $(a+b+1)^2 \leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

11. 이차함수 $y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로
$2m$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-2m=-(x-m)^2-6(x-m)-3$
즉, $y=-x^2+2(m-3)x-m^2+8m-3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
$\frac{D}{4}=(m-3)^2-m^2+8m-3>0$
$2m+6>0$
$\therefore\ m>-3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

12. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠
$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

13. 이차함수 $y = x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

이차함수 $y = x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - \left(a^2 - 4a + 4\right)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a^2 - 4a + 4 = 0$ 에서 $(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$

$a^2 - 12 < 0$ 에서 $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$

$\therefore a = 2$

14. $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 없도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $4-2\sqrt{2} \le m \le 4+2\sqrt{2}$

② $4-2\sqrt{3} < m < 4+2\sqrt{3}$

③ $2-2\sqrt{3} < m < 2+2\sqrt{3}$

④ $m \le 4-2\sqrt{2}$ 또는 $m \ge 4+2\sqrt{2}$

⑤ $m < 4-2\sqrt{3}$또는 $m > 4+2\sqrt{3}$

해설

두 함수 $y = x^2+(m-1)x+m,\ y = x$의 그래프는 교점이 없어야 한다.

$x^2 + (m-1)x + m = x,$

$x^2 + (m-2)x + m = 0$에서

$D = (m-2)^2 - 4m < 0$

$m^2 - 8m + 4 < 0$

$\therefore 4-2\sqrt{3} < m < 4+2\sqrt{3}$

15. 연립부등식 $\begin{cases} |x-1| < 3 \\ x^2 - x - 1 \geq 1 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x < 4$

② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

③ $-1 \leq x \leq 2$

④ $-1 \leq x \leq 2$ 또는 $x > 4$

⑤ $-2 < x \leq -1$ 또는 $2 \leq x < 4$

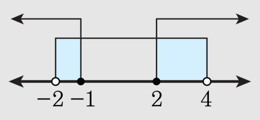
해설

$-3 < x - 1 < 3$,

$\therefore -2 < x < 4$

$x^2 - x - 2 \geq 0, (x-2)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$



$\therefore -2 < x \leq -1$ 또는 $2 \leq x < 4$

16. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 \le 3x \\ x^2 + x \ge 2 \end{cases}$$ 의 해가 부등식

$ax^2 + 2bx - 6 \ge 0$의 해와 같을 때, ab의 값을 구하면?

① 8　　② 4　　③ 2　　④ -4　　⑤ -8

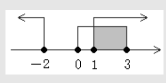
해설

$x^2 - 3x \le 0$, $x(x-3) \le 0$

$0 \le x \le 3$

$x^2 + x - 2 \ge 0$, $(x+2)(x-1) \ge 0$

$x \le -2, x \ge 1$



$(x-1)(x-3) \le 0$, $x^2 - 4x + 3 \le 0$

$\rightarrow -2x^2 + 8x - 6 \ge 0$

$a = -2, b = 4$

$\therefore ab = -8$

17. x에 대한 방정식 $x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을 α,β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2 \le 8$를 만족하는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M,m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을

α,β라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-3k)\ge 0$

$\therefore\ 0\le k\le 3\cdots$①

또, $\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k^2-k$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\le 8$

$(2k)^2-4(2k^2-3k)\le 8$

$k^2-3k+2\ge 0\quad (k-1)(k-2)\ge 0$

$\therefore\ k\le 1,\quad k\ge 2\cdots$②

①,②에서 $0\le k\le 1$ 또는 $2\le k\le 3$

$\therefore\ M=3,\quad m=0$

$\therefore\ M+m=3$

18. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \ge 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \le x < 3$　② $-2 < x < 3$　③ $2 \le x < 3$
④ $2 < x \le 3$　⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \ge 0$ 에서
$x^2(x-2) + (x-2) \ge 0$
$\therefore (x-2)(x^2+1) \ge 0$
$x^2 + 1 > 0$ 이므로 $x - 2 \ge 0$
$\therefore x \ge 2 \cdots$ ㈎
$x^2 - x - 6 < 0$ 에서 $(x-3)(x+2) < 0$
$\therefore -2 < x < 3 \cdots$ ㈏
따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면
$2 \le x < 3$ 이다.

19. 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$의 값을 구하면?

① 2 ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{22}{25}$ ④ $\frac{22}{5}$ ⑤ -2

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \ \alpha\beta=5$

$\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{8-15\times 2}{25}=-\frac{22}{25}$

20. $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$의 값을 구하면?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 13

해설

α, β가 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0 \cdots\cdots$ ①
$\beta^2+(p-3)\beta+1=0 \cdots\cdots$ ②
①에서 $1+p\alpha+\alpha^2=3\alpha$
②에서 $1+p\beta+\beta^2=3\beta$
$\therefore\ (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$
$=3\alpha\cdot 3\beta$
$=9\alpha\beta$
$=9\ (\because\ \alpha\beta=1)$

21. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α,β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\ge 0,\ 3m^2-2m-5\le 0,\ (3m-5)(m+1)\le 0$

$\therefore\ -1\le m\le \frac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

22. $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 8　　④ 11　　⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=1$
또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$
$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$
α,β는 $x^2-3x+1=0$의 근이므로
$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$
$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$
$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$=4+6+1=11$

23. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수의 값이 <u>아닌</u> 것은?

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

① 5　② 7　③ 8　④ 10　⑤ 13

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = -6$의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y) = -6$
이 때, x, y는 양의 정수이므로 $x-y$, $x-2y$도 정수이고 $x-y > x-2y$이다.
따라서, $x-y$, $x-2y$의 값은 다음 표와 같다.

$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

그러므로 각각을 연립하여 풀면 구하는 x, y의 값은

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 13 \\ y = 7 \end{cases}$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+m^2-1=0$이 정수근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2+mx+x^2-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-m\pm\sqrt[2]{m^2-4\left(m^2-1\right)}}{2}$$

이 때, x가 정수이므로

$\sqrt{m^2-4\left(m^2-1\right)}=k$(단, k는 정수는 $k\geq 0$)라 하면

$-3m^2+4=k^2$

따라서, m의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$로 3개다.

25. 이차방정식 $x^2 - nx + 2n + 1 = 0$이 양의 정수근을 두 개 가질 때 두 근과 n의 값의 합은 ?

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

해설

$\alpha + \beta = n$, $\alpha\beta = 2n + 1$에서 n을 소거하여 정리하면
$\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta - 1 = 0$, $(\alpha - 2)(\beta - 2) = 5$
$\therefore\ \alpha - 2 = 1, \beta - 2 = 5$ 또는 $\alpha - 2 = 5, \beta - 2 = 1$
(양의 근이므로 두 곱이 $(-1)(-5)$ 인 경우 제외)
$\therefore\ (\alpha, \beta) = (3, 7), (7, 3)$ 이 때 $n = 10$
$\therefore\ \alpha + \beta + n = 20$

26. 두 방정식 $\begin{cases} ab+bc=44 \\ ac+bc=23 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 양의 정수쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$c(a+b)=23$ 에서 23은 소수이므로, 두 인수는 1, 23이다.
a,b는 양의 정수이므로, $a+b>1$ 이고 $c=1,\ a+b=23$
이것을 처음 식에 대입하면
$a(23-a)+(23-a)=44,\ a^2-22a+21=0$
$\therefore\ (a,\ b)=(1,22),\ (21,2)$ 그러므로 만족하는 양의 정수쌍 $(a,\ b,\ c)$ 는
$(1,\ 22,\ 1),\ (21,\ 2,\ 1)$ 의 2개이다.

27. 어떤 직사각형의 세로의 길이가 가로의 길이에서 1cm 을 더한 후 2배한 것과 같다고 한다. 이 직사각형의 둘레의 길이가 20cm 이상 35 cm 미만이고, 가로의 길이를 x cm라 할 때, x의 범위로 옳은 것은?

① $\frac{8}{3} \le x \le \frac{31}{6}$　② $\frac{8}{3} < x \le \frac{31}{6}$　③ $\frac{8}{3} < x < \frac{31}{6}$
④ $\frac{8}{3} \le x < \frac{31}{6}$　⑤ $\frac{8}{3} \le x$

해설

가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이를 $2(x+1)$ cm이다. 이러한 직사각형의 둘레의 길이를 식으로 나타내면 $2x+2\times2(x+1)$이고, 정리하면 $6x+4$ 이다. 둘레의 길이가 20cm 이상 35cm 미만을 식으로 표현하면, $20 \le 6x+4 < 35$ 이므로 이를 연립부등식으로 바꾸면 $\begin{cases} 20 \le 6x+4 \\ 6x+4 < 35 \end{cases}$ 이고 정리하면 $\begin{cases} x \ge \frac{8}{3} \\ x < \frac{31}{6} \end{cases}$

이다.

따라서 가로의 길이의 범위는 $\frac{8}{3} \le x < \frac{31}{6}$ 이다.

28. 민수는 각각 a, $a+2$, $a+4$ 인 막대로 삼각형을 만들려고 한다. 민수가 삼각형을 만들 수 있는 a 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

해설

삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a+4 < a+(a+2)$ 이고 정리하면 $a > 2$ 이다.

29. 가위로 어떤 볼록사각형의 대각선을 따라 잘랐더니 세 변의 길이가 각각 4, 5, y 인 삼각형 A 와 12, y, x 인 삼각형 B 가 만들어졌다. 삼각형 A 의 변의 길이 중 y 가 가장 길고, 삼각형 B 의 변의 길이 중 y 가 가장 짧을 때, x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 < x < 21$

해설

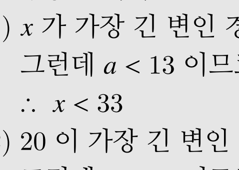
삼각형 A 에서 $y < 4 + 5$, 즉 $y < 9$
삼각형 B 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < y + 12$
그런데 $y < 9$ 이므로 $x < y + 12 < 9 + 12$
$\therefore\ x < 21$
2) 12 가 가장 긴 변인 경우 : $12 < x + y$
그런데 $y < 9$ 이므로 $12 < x + y < x + 9$
$\therefore\ x > 3$
따라서 1), 2) 에 의해서 $3 < x < 21$ 이다.

30. 길이가 각각 6, 7, 20, x 인 선분을 끝점끼리 이어 붙여 볼록한 사각형을 만들 수 있는 x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $7 < x < 33$

해설



위의 그림과 같이 보조선을 그어 그 길이를 a 라 하자.
삼각형 B 에서 $a < 7 + 6$, 즉 $a < 13$
삼각형 A 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < a + 20$
그런데 $a < 13$ 이므로 $x < a + 20 < 13 + 20$
$\therefore\ x < 33$
2) 20 이 가장 긴 변인 경우 : $20 < a + x$
그런데 $a < 13$ 이므로 $20 < a + x < 13 + x$
$\therefore\ x > 7$
따라서 1), 2) 에 의해서 $7 < x < 33$ 이다.

31. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$　② $-2 \le x < 0$　③ $-1 \le x < 1$
④ $-1 \le x < 0$　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$
$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$
$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$
$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x-1<0$이므로
$-1 \le x < 1$

32. $6[x]^2-31[x-1]-13<0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3\le x<3$　② $-2\le x<5$　③ $0\le x<3$
④ $1\le x<5$　⑤ $1\le x<6$

해설

$n\le [x]<n+1$에서
$n-1<[x-1]<n$이므로
$[x-1]=[x]-1$
$\therefore 6[x]^2-31[x-1]-13$
$=6[x]^2-31([x]-1)-13$
$=6[x]^2-31[x]+18<0$
$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2)<0$
$\dfrac{2}{3}<[x]<\dfrac{9}{2}$
$\therefore 1\le [x]\le 4$이므로
$[x]=1,\ 2,\ 3,\ 4$
$\therefore 1\le x<5$

33. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대정수를 나타낼 때, 부등식 $4[x]^2-36[x]+45<0$를 만족하는 x의 최대 정수값을 M, 최소 정수값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$4[x]^2-36[x]+45<0$

$(2[x]-3)(2[x]-15)<0$

$\frac{3}{2}<[x]<\frac{15}{2} \quad \therefore\ [x]=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

$\therefore\ M=7,\ m=2 \quad \therefore M-m=5$