

1. x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$,
 $Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5, Q(x) = (x+3)Q_1(x) + 3$ 이므로
 $P(x) = (x-2)((x+3)Q_1(x) + 3) + 5$
 $= (x-2)(x+3)Q_1(x) + 3x - 1$
 $\therefore P(-3) = -9 - 1 = -10$
따라서 $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는
 $-3P(-3) = -3 \times (-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서 양변에 x 를 곱하면
 $xP(x) = x(x-2)Q(x) + 5x \cdots \textcircled{1}$
나머지정리에 의해 $xP(x)$ 를 $x+3$ 로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$ 이다.
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $-3P(-3) = -3 \cdot (-5)Q(-3) - 15$
 $Q(-3) = 3$ 을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

2. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 으로 나누면 나머지가 9, $f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누면 나머지가 -3이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(x) + g(x) = (x^2 + x + 1)Q_1(x) + 9 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 + x + 1)Q_2(x) - 3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2f(x) = (x^2 + x + 1) \{Q_1(x) + Q_2(x)\} + 6$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \frac{Q_1(x) + Q_2(x)}{2} + 3$$

$\therefore$ 나머지는 3

3. n 이 자연수일 때, x 의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$ 이 될 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -1
- ② 1
- ③ -2
- ④ 2
- ⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots$ ①
 $x=3$ 을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$
 $\therefore b=-3a-9\cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
 $x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$
 $\therefore (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$
양변을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 비교하면
 $x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$
 $x=3$ 을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n \therefore 6+a=1 \therefore a=-5$
②에서 $b=6$
 $\therefore a=-5, b=6 \therefore a+b=1$

4. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $2x + 4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$\begin{aligned} 2f(x) - g(x) &= (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ g(x) &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) \text{라 둘 수 있다.} \\ \text{따라서 } 2f(x) &= g(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)\{A(x) + B(x)\} + 2R(x) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = (x^2 + 1)\frac{1}{2}\{A(x) + B(x)\} + R(x)$$

$$\therefore R(x) = 2x + 4 \text{이고 } R(10) = 24$$