1. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$　　② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$

③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$　　④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$

⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

1	1	2a+3	-6a-5	4a+1
		1	2a+4	-4a-1
	1	2a+4	-4a-1	0

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\{x^2+2(a+2)x-4a-1\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

2. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하고 $f(n) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$라 정의할 때, $f(n) = 0$이 되게 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x^2+x+1 = 0$의 한 근 ω

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2+\omega+1 = 0$

$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$

$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$

$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2} = 0$

자연수 n의 최솟값은 2

3. 방정식 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\omega^2 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^8$ 의 값을 구하면?

① $-i$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ i

해설

준 방정식의 양변에 $x - 1$ 을 곱하면
$x^5 - 1 = 0$
$\therefore x^5 = 1$ 즉, $\omega^5 = 1$
$\therefore\ \omega^2 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^8$
$= \omega^2 + \omega^4 + 1 + \omega + \omega^3$
$= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$

4. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$의 한근이 $1 + 2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x = 1+2i,\ \ x^2 = -3+4i,\ \ x^3 = -11-2i,\ \ x^4 = -7 - 24i,$

$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$

$= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$

$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$

$\therefore 11a + 3b = 22,\ -2a + 4b = -4$

연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$

$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a = k - 2,\ b = 8 - 2k,\ 14 = 5k - 6$

$\therefore\ k = 4,\ a = 2,\ b = 0$

5. x에 대한 방정식 $f(x) = x^3 + x^2 + (a^2 - 4a - 2)x + (2a^2 - 8a) = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 a의 값을 정할 때, 정수 a의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$f(x) = (x+2)(x^2 - x + a^2 - 4a) = 0$
여기서, $x = -2$ 는 $x^2 - x + a^2 - 4a = 0$의 근이 될 수 없다.
$(\because\ (-2)^2 - (-2) + a^2 - 4a = (a-2)^2 + 2 \neq 0)$
따라서, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면,
$x^2 - x + a^2 - 4a = 0$이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.
$\therefore\ D = 1 - 4(a^2 - 4a) > 0,\ 4a^2 - 16a - 1 < 0$
$\therefore\ \dfrac{4 - \sqrt{17}}{2} < a < \dfrac{4 + \sqrt{17}}{2}$
따라서, a 의 정수값은 0, 1, 2, 3, 4 의 5개이다.

6. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\cdot\overline{\omega}-\omega\cdot\overline{\omega}^{11}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω가 x^2-x+1의 근이므로
$\overline{\omega}$도 x^2-x+1의 근이다.
즉, $\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3$
$=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
$=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=(-1)^6\cdot\omega^2+(-1)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2-\omega+1=0$

(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}^{11}$
$=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2+(\overline{\omega}^3)^{33}\cdot\overline{\omega}^2-$
$\omega\overline{\omega}\left\{(\omega^3)^3\cdot\omega+(\overline{\omega}^3)^3\cdot\overline{\omega}\right\}$
$=(-1)\omega^2+(-1)\overline{\omega}^2-\left\{(-1)\omega+(-1)\overline{\omega}\right\}$
$=-(\omega^2-\omega)-(\overline{\omega}^2-\overline{\omega})$
$=-(-1)-(-1)=2$