

1. 삼차방정식 $x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + (4a+1) = 0$ 이 중근을 가질 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$ ② $a = -2, -2 \pm \sqrt{10}$
 ③ $a = 3, -3 \pm \sqrt{5}$ ④ $a = 1, 4 \pm \sqrt{10}$
 ⑤ $a = -1, -2 \pm 2\sqrt{2}$

해설

$f(x) = x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + 4a+1$ 이라 하면
 $f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $(x-1)$ 을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 2a+3 & -6a-5 & 4a+1 \\
 & & 1 & 2a+4 & -4a-1 \\
 \hline
 & 1 & 2a+4 & -4a-1 & 0
 \end{array}$$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$(x-1) \{x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1\} = 0$$

(i) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x \neq 1$ 인 경우

$$D = 0 \text{이므로, } a^2 + 8a + 5 = 0$$

$$\therefore a = -4 \pm \sqrt{11}$$

(ii) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x = 1$ 을 근으로 갖는 경우

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + 2(a+2) - 4a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$

2. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$ 이 되게 하는 자연수 n 의 최솟값은?

① 2

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x^2+x+1=0 \text{의 한 근 } \omega$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n 의 최솟값은 2

3. 방정식 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\omega^2 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^8$ 의 값을 구하면?

① $-i$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ i

해설

준 방정식의 양변에 $x - 1$ 을 곱하면

$$x^5 - 1 = 0$$

$$\therefore x^5 = 1 \text{ 즉, } \omega^5 = 1$$

$$\therefore \omega^2 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^8$$

$$= \omega^2 + \omega^4 + 1 + \omega + \omega^3$$

$$= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$$

4. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이면 $x = 1 + 2i$, $x^2 = -3 + 4i$, $x^3 = -11 - 2i$, $x^4 = -7 - 24i$,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$$

$$= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$$
$$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$$

$$\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$$

연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$$x = 1 + 2i \text{에서 } x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$$a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$$

$$\therefore k = 4, a = 2, b = 0$$

5. x 에 대한 방정식 $f(x) = x^3 + x^2 + (a^2 - 4a - 2)x + (2a^2 - 8a) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 a 의 값을 정할 때, 정수 a 의 개수는?

① 3개

② 4개

③ 5개

④ 6개

⑤ 7개

해설

$$f(x) = (x+2)(x^2 - x + a^2 - 4a) = 0$$

여기서, $x = -2$ 는 $x^2 - x + a^2 - 4a = 0$ 의 근이 될 수 없다.

$$(\because (-2)^2 - (-2) + a^2 - 4a = (a-2)^2 + 2 \neq 0)$$

따라서, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면,

$x^2 - x + a^2 - 4a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$$\therefore D = 1 - 4(a^2 - 4a) > 0, 4a^2 - 16a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{4 - \sqrt{17}}{2} < a < \frac{4 + \sqrt{17}}{2}$$

따라서, a 의 정수값은 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

6. $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

$$(1) \omega^{20} + \omega^{10} + 1$$

$$(2) \omega^{101} + \bar{\omega}^{101} - \omega^{11} \cdot \bar{\omega} - \omega \cdot \bar{\omega}^{11}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 0

▶ 정답 : 2

해설

ω 가 $x^2 - x + 1$ 의 근이므로
 $\bar{\omega}$ 도 $x^2 - x + 1$ 의 근이다.

$$\text{즉, } \omega^3 = -1, \bar{\omega}^3$$

$$= -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$(1) \omega^{20} + \omega^{10} + 1$$

$$= (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \cdot \omega + 1$$

$$= (-1)^6 \cdot \omega^2 + (-1)^3 \cdot \omega + 1$$

$$= \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$(2) \omega^{101} + \bar{\omega}^{101} - \omega^{11} \bar{\omega} - \omega \bar{\omega}^{11}$$

$$= (\omega^3)^{33} \cdot \omega^2 + (\bar{\omega}^3)^{33} \cdot \bar{\omega}^2 -$$

$$\omega \bar{\omega} \{ (\omega^3)^3 \cdot \omega + (\bar{\omega}^3)^3 \cdot \bar{\omega} \}$$

$$= (-1)\omega^2 + (-1)\bar{\omega}^2 - \{ (-1)\omega + (-1)\bar{\omega} \}$$

$$= -(\omega^2 - \omega) - (\bar{\omega}^2 - \bar{\omega})$$

$$= -(-1) - (-1) = 2$$