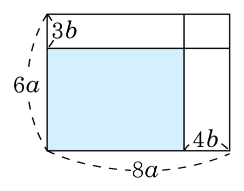
1. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$

② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$

④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$

2. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots$①

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots$②

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

3. 다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① $x^4 + 5x^2 + 1$　② $x^4 + x^2 - 3$　③ $x^4 - 5x^2 + 1$

④ $x^4 + x^2 + 3$　⑤ 답 없음

해설

$x^2 + 1 = t$라 하면 $x^2 = t - 1$

주어진 식에 대입하면

$f(t) = (t-1)^2 + 5(t-1) + 3$

$\therefore\ f(t) = t^2 + 3t - 1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2 + 3(x^2-1) - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 3 \end{aligned}$$

4. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면
$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$
$a^3+1=0$ $\quad\therefore\ a^3=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$
$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$
$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

5. $a-b=1$ 이고, $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{14}+b^{20}$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$b=a-1$ 을 $a^2+b^2=-1$ 에 대입하면

$a^2-a+1=0$ 에서 $a^3=-1$

$a=b+1$ 을 $a^2+b^2=-1$ 에 대입하면

$b^2+b+1=0$ 에서 $b^3=1$

$$\begin{aligned} a^{14}+b^{20} &= (a^3)^4\times a^2+(b^3)^6\times b^2 \\ &= a^2+b^2=-1 \end{aligned}$$

6. 다항식 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$이 성립할 때, $2a - b + 2c - d$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$f(0) = 1$이므로 $d = 1$
$f(1) = 0$이므로 $a + b + c = -1 \cdots$ ①
$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$에서
$x = -1$을 대입하면 $f(-1) = 0$이므로
$-a + b - c = -1 \cdots$ ②
$x = 0$을 대입하면 $f(2) = -1$이므로
$8a + 4b + 2c = -2 \cdots$ ③
①, ②, ③을 연립하여 풀면
$\therefore\ a = \frac{1}{3},\ b = -1,\ c = -\frac{1}{3},\ d = 1$
$\therefore\ 2a - b + 2c - d = 0$

7. n 이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2+ax+b)$ 를 $(x+2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$ 가 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a-2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)\cdots$①

$x=-2$ 를 대입하면,

$4^n(4-2a+b)=0\ \therefore\ b=2a-4\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

한편, $x^2+ax+2a-4=x^2-4+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2)+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2+a)$

$\therefore\ x^{2n}(x+2)(x-2+a)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore\ x^{2n}(x-2+a)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$ 를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n \quad \therefore -4+a=1 \quad \therefore\ a=5$

②에서 $b=6 \quad \therefore\ a-2b=-7$

8. 임의의 실수 x에 대하여 $x^{11}+x=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+\cdots+a_{11}(x+3)^{11}$이 성립할 때, $a_1+a_3+\cdots+a_{11}$의 값은?

① $2^{22}-2^{11}+2$ ② $2^{22}+2^{11}-2$ ③ $2^{21}-2^{10}+1$
④ $2^{21}+2^{10}-1$ ⑤ $2^{21}+2^{10}+1$

해설

주어진 식의 양변에 $x=-2,\ x=-4$를 각각 대입하면

$-2^{11}-2=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}\cdots$ ㉠

$-2^{22}-4=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_{11}\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=2^{22}-2^{11}+2$

$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^{21}-2^{10}+1$

9. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면

i) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

10. $x-1$로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$로 나누면 나머지가 -1인 다항식 $f(x)$가 있다. $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. $f(0)=0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $Q(0)=0$이다.
㉡ $f(x)$는 이차식이 될 수 없다.
㉢ $f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=x^3$이다

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$f(1)=a+b=1,\quad f(-1)=-a+b=-1$
$\therefore\ a=1,\ b=0$
$\therefore\ f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$
㉠ $f(0)=-Q(0)=0$　　$\therefore$참
㉡ $f(x)$가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$참
㉢ $Q(0)=0$이므로 $Q(x)=ax\ (a\neq 0)$
$\therefore\ f(x)=ax(x^2-1)+x\ (a\neq 0)$　　$\therefore$거짓

11. x^4 을 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1 이라 하고, $q(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, r_2 의 값은?

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)q(x)+r_1$ 에서 $x=-\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$r_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)q(x) = x^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

이때, $a=-\frac{1}{2}$ 로 놓으면 $(x-a)q(x)=x^4-a^4$

$$\begin{aligned}\therefore\ q(x) &= (x^4-a^4)\div(x-a)\\ &= (x+a)(x^2+a^2)\end{aligned}$$

따라서, $q(x)$ 를 $x-a$ 로 나눈 나머지 r_2 는

$q(a)=4a^3$

$$\begin{aligned}\therefore\ q\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

12. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합 (상수항 포함) 과 R 와의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$　② $\frac{1}{2}\cdot 2^{30}$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $2(3^{30}+1)$　⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터
$x^{30}=(x-3)Q(x)+R\cdots$ ㉠
이므로 몫 $Q(x)$ 는 29 차의 다항식이다.
㉠의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$
여기에서 몫은 29 차의 다항식이므로
$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{29}x^{29}$
으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은
$x=1$ 을 대입한
$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}$ 과 같다.
따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R|\cdots$ ㉡
한편 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
$1=-2Q(1)+R$ ∴ $Q(1)=\frac{1}{2}(R-1)$
이 값을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}|Q(1)-R| &= \left|\frac{1}{2}(R-1)-R\right| = \frac{|R+1|}{2}\\ &= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1)\end{aligned}$$

13. 다항식 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고 $x+4$로 나누면 3이 남는다. $f(x)$를 $(x+2)^2(x+4)$로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $\frac{3}{4}(x+2)^2$ ② $\frac{3}{2}(x+2)^2$ ③ $3(x+2)^2$

④ $(x+2)(x+4)$ ⑤ $3x^2+4x+3$

해설

$f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + ax^2 + bx + c$라 놓으면 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로

$ax^2 + bx + c = a(x+2)^2$

$\therefore\ f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + a(x+2)^2$

또 $f(x)$를 $(x+4)$로 나눌 때 나머지가 3이므로 $f(-4) = 3$

$\therefore\ 4a = 3,\ a = \frac{3}{4}$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $\frac{3}{4}(x+2)^2$

14. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{2}{3}$, $f(3)=\frac{3}{4}$, $f(4)=\frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ $\frac{5}{6}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
$f(n)=\frac{n}{n+1}(n=0,1,2,3,4)$
$(n+1)f(n)-n=0$
$g(x)=(x+1)f(x)-x$로 놓으면
$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$
그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.
$\therefore\ g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(a\neq 0)\cdots$ ㉠
그런데, $g(-1)=1$이므로 ㉠에서
$g(-1)=-(5\times4\times3\times2\times1)a=1$
$\therefore\ a=-\frac{1}{(5\times4\times3\times2\times1)}$
$g(x)=(x+1)f(x)-x$
$=-\frac{1}{(5\times4\times3\times2\times1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$g(5)=6f(5)-5=-\frac{(5\times4\times3\times2\times1)}{(5\times4\times3\times2\times1)}=-1$
$\therefore\ f(5)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

15. 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots$ ㉠
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.

16. x 에 대한 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

17. 다음 중에서 $2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$의 인수인 것은?

① $2x+1$ ② $x+2$ ③ $x+2a$

④ $x+a$ ⑤ $2x-1$

해설

$2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$
$=2x^3-4ax^2-3x^2+6ax-2x+4a$
$=(2x^3-3x^2-2x)-2a(2x^2-3x-2)$
$=x(2x^2-3x-2)-2a(2x^2-3x-2)$
$=(2x^3-3x-2)(x-2a)$
$=(x-2a)(2x+1)(x-2)$

18. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형 ㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형 ㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형 ㉣ $a=b$ 인 이등변삼각형 ㉤ $b=c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
④ $a=b$ 인 이등변삼각형
⑤ $b=c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=0$

$(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2=0$

$a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

$=2(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

19. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b=-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{2}$일 때, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$의 값은?

① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ -2

해설

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$
$=\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}$
$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
$-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)\}$
$=0$

20. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$인 세 수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4 ② 3 ③ 1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}\ \cdots\cdots$ ㉠
$b-c=2+\sqrt{3}\ \cdots\cdots$ ㉡
㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$

21. 어느 회사의 A공장과 B공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A공장에서는 모니터를 400 대, B공장에서는 스피커를 10000 대 만든다. 모니터는 20000 대, 스피커는 80000 대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 50, 000 원, 주말에는 70, 000 원을 지불한다. 2008 년 4 월 1 일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008 년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답 : ________ 원

▷ 정답 : 390000 원

해설

4 월 1 일, 4 월 2 일 $\cdots$ 을 각각 1, 2$\cdots$ 라 하면
12 월 31 일은 275 이다.
모니터가 운반되는 날이 $5a+1$ 이고
스피커가 운반되는 날이 $8b+2$ 이면,
같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a+1=8b+2$
$b=5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$ 를 대입하면
$b=5k+3$ 일 때, 성립한다.
그러므로 같은날 운반되는 경우
$\rightarrow 40k+26\ (k=0,\ 1,\ 2\cdots)$ 이다.
금년에 같은 날 운반
26, 66, 106, 146, 186, 226, 266 이고,
이들 중 평일은 5 일, 주말은 2 일 이므로
$(50000\times 5)+(70000\times 2)\ =\ 250000+140000\ =\ 390000$

22. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠
$P + Q = x\left\{2x^2 + (a + b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡
$P,\ Q$ 의 최대공약수를 G 라 하면,
G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.
그런데 G 는 이차이고, $P,\ Q$ 에는
x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는
$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.
$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$
$\therefore\ a = -2,\ b = 0$
$\therefore\ 2a + b = -4$

23. 두 다항식 x^3+ax^2+bx+1과 x^3+bx^2+ax+1의 최대공약수가 일차식일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A(x)=x^3+ax^2+bx+1$, $B(x)=x^3+bx^2+ax+1$로 놓으면

$A(x)-B(x)$

$=(x^3+ax^2+bx+1)-(x^3+bx^2+ax+1)$

$=(a-b)x(x-1)$

$A(x)$, $B(x)$의 최고차항의 계수가 1 이므로 최대공약수는 x 이거나 $x-1$ 이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x-1$ 이다.

따라서 다항식 $A(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$A(1)=1+a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-2$

24. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$ 의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i-2$ ② $2i+2$ ③ $2i-4$

④ $2i+4$ ⑤ $4i-2$

해설

$$
\begin{aligned}
f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\
&= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}) \\
&\quad + (-1+2-3+\cdots+10) \\
&= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\
&= i+4 \\
f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\
&= (i+4) + (-i-11) = -7 \\
f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\
&= -7 + (1+12) = 6 \\
f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\
&= 6 + (i-13) = i-7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\therefore f(10)+f(11)+f(12)+f(13) \\
&\quad = (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4
\end{aligned}
$$

25. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면, $a = 0$이고 $\beta = 0$이다.
㉢ $\alpha = \beta$이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$는 순허수이다.
㉤ $\alpha - \beta$가 실수이면 $\alpha > \beta$이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha = a + bi$,$\beta = c + di$ (a, b, c, d는 실수)
㉠ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$
$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\overline{\alpha} = 0$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$
$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)
㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$
㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)
㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)
㉤ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\ b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

26. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 x, y 에 대하여 $\overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 이므로
직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.
따라서 복소수의 켤레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해 보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\overline{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \overline{\alpha} = 1,\ \alpha\overline{\alpha} = \dfrac{3}{2}$ 이고

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1},\ \bar{z} = \dfrac{\overline{\alpha} - 1}{\overline{\alpha} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)}{(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)} \\ &= \frac{\alpha\overline{\alpha} - (\alpha+\overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + (\alpha+\overline{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$\therefore\ 7z\bar{z} = 7 \times \dfrac{3}{7} = 3$

27. z이 복소수일 때, $z^2 = \bar{z}$ ($\bar{z}$는 z의 켤레복소수)가 되는 모든 z의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$z = a + bi$이면
$z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = a - bi = \bar{z}$
$a^2 - b^2 = a \cdots$①, $2ab = -b \cdots$②
②에서 $b = 0$또는 $a = -\frac{1}{2}$
i) $b = 0$일 때, ①에서 $a = 0, 1$
$\therefore\ z = 0$ 또는 1
ii) $a = -\frac{1}{2}$일 때, ①에서 $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 또는 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
i), ii)에 따라 모든 z의 합은 0

28. 실수가 아닌 복소수 z 가 $z^5 = 1$ 일 때,
$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$ 의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ -1　④ 5　⑤ -5

해설

$z^5 = 1$ 이므로 $z^5 - 1 = 0$ 에서
$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$
$z \neq 1$ 이므로 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (1-z)(1-z^4)(1-z^2)(1-z^3) \\
&= (2-z-z^4)(2-z^2-z^3) \\
&= 4-(z+z^2+z^3+z^4) \\
&= 5
\end{aligned}
$$

29. $\sqrt{\dfrac{b+1}{a-1}} = -\dfrac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $\sqrt{(b-a+2)^2}+\sqrt{(2-a)^2}+\sqrt{(2+b)^2}=0$ 을 만족하는 점의 자취 $p(a,\ b)$ 의 기울기를 구하면?

① 1　② -1　③ 2　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{2}{3}$

해설

$\sqrt{\dfrac{b+1}{a-1}} = -\dfrac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 에서

$a-1<0,\ b+1\ge 0 \therefore\ b\ge -1,\ a<1$

$\therefore\ b-a+2=b+1-(a-1)>0$

$a-2<0,\ 2-a>0$

$2+b>0$

$\therefore$ (준식) $=(b-a+2)+(2-a)+(b+2)$

$=2b-2a+6$

$\therefore\ 2b-2a+6=0$에서 $b=a-3$

$\therefore$ 기울기는 1

30. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|x^2 + (a-2)x - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$

$x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$
… ㉠

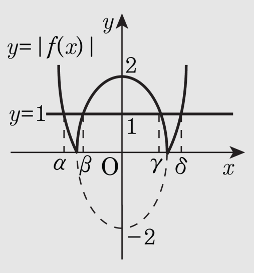
$x^2 + (a-2)x - 2 = -1$의 두 근을 γ, δ라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$
… ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는$y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a - 2 = 0,\ a = 2$

31. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$ 라 할 때, $f(x, y) = 0$ 이 두 개의 직선을 나타내도록 k 의 값을 정하면?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

$f(x,\ y) = x^2 + (y+2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$
주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면
$x,\ y$ 에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로
근의 공식에서 근호 안의 식 $(= D)$ 이 완전제곱꼴이어야 한다.
$D = (y+2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$
$\quad = 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots$ (i)
(i) 이 완전제곱식이어야 하므로
(i) 의 판별식
$\frac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$
$108 + 36k = 0 \quad \therefore\ k = -3$

32. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}<0,\ \ \frac{\alpha}{\beta}<0$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$=-4$$

해설

33. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 방정식 $x^2+2ax+b=0$과 $x^2+2bx+a=0$의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b의 관계식은?

① $a+b=0$ ② $a-b-1=0$ ③ $a-b+1=0$

④ $a+b-1=0$ ⑤ $a+b+1=0$

해설

$x^2+2ax+b=0$의 해를 α, β

$x^2+2bx+a=0$의 해를 γ, δ라 하면

$|\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|$에서

$(\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$,

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$

$(-2a)^2-4b=(-2b)^2-4a$

$\therefore\ (a-b)(a+b+1)=0$

$a\neq b$이므로 $a+b+1=0$

34. 실수 $x,\ y,\ z$가 $x+y+z=6,\ xy+yz+zx=9$를 만족할 때 x의 최대값을 M, 최소값을 m이라 한다. 이 때 $M-m$의 값을 구하면 ?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$y+z=6-x,$

$yz=9-x(y+z)=9-x(6-x)=(x-3)^2$

실수 y, z를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$t^2-(6-x)t+(x-3)^2=0$

$D=(6-x)^2-4(x-3)^2\geq 0$에서 $x(x-4)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq x\leq 4$

$M=4,\ m=0\quad \therefore\ M-m=4$

35. 사차방정식 $x^4 + 2ax^2 + a + 2 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a < -2$　　② $-2 < a < -1$　　③ $-1 < a < 2$

④ $a > 2$　　⑤ $-1 < a < 0$

해설

$x^2 = t$로 놓으면
$t^2 + 2at + a + 2 = 0$이
서로 다른 양근을 가져야 하므로
(i) $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 > 0 \quad \therefore\ a < -1,\ 2 < a$
(ii) $\alpha + \beta = -2a > 0 \quad \therefore a < 0$
(iii) $\alpha\beta = a + 2 > 0 \quad \therefore\ a > -2$
$\therefore$ (i), (ii), (iii)에서 $-2 < a < -1$