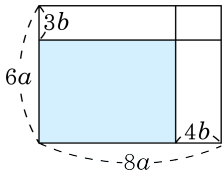


1. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$

② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$

④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$$

2. 0이 아닌 세수 x, y, z 에 대하여 x, y, z 중 적어도 하나는 6이고, x, y, z 의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$ 일 때, $2(x + y + z)$ 의 값을 구하면?

① 6

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

x, y, z 중 적어도 하나가 6이므로,

$$(x - 6)(y - 6)(z - 6) = 0$$

$$\therefore xyz - 6(xy + yz + zx) + 36(x + y + z) - 216 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

또, x, y, z 의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \quad \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 6(xy + yz + zx) = xyz \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$36(x + y + z) = 216$$

$$\therefore 2(x + y + z) = 12$$

3. 다항식 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ 을 만족시킨다. $f(x^2 - 1)$ 을 구한 것은?

① $x^4 + 5x^2 + 1$

② $x^4 + x^2 - 3$

③ $x^4 - 5x^2 + 1$

④ $x^4 + x^2 + 3$

⑤ 답 없음

해설

$$x^2 + 1 = t \text{라 하면 } x^2 = t - 1$$

주어진 식에 대입하면

$$f(t) = (t - 1)^2 + 5(t - 1) + 3$$

$$\therefore f(t) = t^2 + 3t - 1$$

$$\begin{aligned} f(x^2 - 1) &= (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 3 \end{aligned}$$

4. $a + b = 1$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2005} + b^{2005}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$b = 1 - a$ 를 $a^2 + b^2$ 에 대입하여 정리하면

$$a^2 - a + 1 = 0 \quad (a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$$

$$a^3 + 1 = 0 \quad \therefore a^3 = -1$$

마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$

$$a^{2005} + b^{2005} = (a^3)^{668} \cdot a + (b^3)^{668} \cdot b = a + b = 1$$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$$a^2 - a + 1 = 0 \quad \text{에서} \quad a^2 = a - 1$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a - 1) \cdot a = a^2 - a = -1$$

마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$

5. $a - b = 1$ 이고, $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{14} + b^{20}$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$b = a - 1$ 을 $a^2 + b^2 = -1$ 에 대입하면

$a^2 - a + 1 = 0$ 에서 $a^3 = -1$

$a = b + 1$ 을 $a^2 + b^2 = -1$ 에 대입하면

$b^2 + b + 1 = 0$ 에서 $b^3 = 1$

$$\begin{aligned} a^{14} + b^{20} &= (a^3)^4 \times a^2 + (b^3)^6 \times b^2 \\ &= a^2 + b^2 = -1 \end{aligned}$$

6. 다항식 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ 이 성립할 때, $2a - b + 2c - d$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$f(0) = 1$ 이므로 $d = 1$

$f(1) = 0$ 이므로 $a + b + c = -1 \dots \textcircled{1}$

$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$ 에서

$x = -1$ 을 대입하면 $f(-1) = 0$ 이므로

$-a + b - c = -1 \dots \textcircled{2}$

$x = 0$ 을 대입하면 $f(2) = -1$ 이므로

$8a + 4b + 2c = -2 \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$\therefore a = \frac{1}{3}, b = -1, c = -\frac{1}{3}, d = 1$$

$$\therefore 2a - b + 2c - d = 0$$

7. n 이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a - 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -7

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \cdots \textcircled{1}$$

$x = -2$ 를 대입하면,

$$4^n(4 - 2a + b) = 0 \quad \therefore b = 2a - 4 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\text{한편, } x^2 + ax + 2a - 4 = x^2 - 4 + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2) + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2 + a)$$

$$\therefore x^{2n}(x + 2)(x - 2 + a)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\therefore x^{2n}(x - 2 + a) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n \quad \therefore -4 + a = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 6 \quad \therefore a - 2b = -7$$

8. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^{11} + x = a_0 + a_1(x+3) + a_2(x+3)^2 + \cdots + a_{11}(x+3)^{11}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + \cdots + a_{11}$ 의 값은?

① $2^{22} - 2^{11} + 2$

② $2^{22} + 2^{11} - 2$

③ $2^{21} - 2^{10} + 1$

④ $2^{21} + 2^{10} - 1$

⑤ $2^{21} + 2^{10} + 1$

해설

주어진 식의 양변에 $x = -2$, $x = -4$ 를 각각 대입하면

$$-2^{11} - 2 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$-2^{22} - 4 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots - a_{11} \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{11}) = 2^{22} - 2^{11} + 2$$

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_{11} = 2^{21} - 2^{10} + 1$$

9. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$$

$$\therefore f(-2) = -9$$

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

i) $f(-1) = 3$ 에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$ 에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$ 에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$$a = -2, b = -1, c = 5$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$

$$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$$

10. $x-1$ 로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 -1 인 다항식 $f(x)$ 가 있다. $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. $f(0)=0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $Q(0)=0$ 이다.

㉡ $f(x)$ 는 이차식이 될 수 없다.

㉢ $f(x)$ 가 삼차식이면 $f(x)=x^3$ 이다

① ㉠

② ㉡

③ ㉢, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

$$f(1) = a + b = 1, \quad f(-1) = -a + b = -1$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0$$

$$\therefore f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + x$$

$$\text{㉠ } f(0) = -Q(0) = 0 \quad \therefore \text{참}$$

㉡ $f(x)$ 가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$ 가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$ 이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$ 참

$$\text{㉢ } Q(0) = 0 \text{이므로 } Q(x) = ax \quad (a \neq 0)$$

$$\therefore f(x) = ax(x^2 - 1) + x \quad (a \neq 0) \quad \therefore \text{거짓}$$

11. x^4 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1 이라 하고, $q(x)$ 를 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, r_2 의 값은?

① $-\frac{1}{8}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$x^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right) q(x) + r_1$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$r_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right) q(x) = x^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$

이때, $a = -\frac{1}{2}$ 로 놓으면 $(x - a)q(x) = x^4 - a^4$

$$\begin{aligned}\therefore q(x) &= (x^4 - a^4) \div (x - a) \\ &= (x + a)(x^2 + a^2)\end{aligned}$$

따라서, $q(x)$ 를 $x - a$ 로 나눈 나머지 r_2 는

$$q(a) = 4a^3$$

$$\begin{aligned}\therefore q\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

12. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$

② $\frac{1}{2} \cdot 2^{30}$

③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$

④ $2(3^{30} + 1)$

⑤ $2(3^{30} - 1)$

해설

문제의 조건으로부터

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R \cdots \textcircled{7}$$

이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.

⑦의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$

여기에서 몫은 29차의 다항식이므로

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{29}x^{29}$$

으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은

$x=1$ 을 대입한

$$Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} \text{과 같다.}$$

따라서 구하는 차는 $|Q(1) - R| \cdots \textcircled{8}$

한편 ⑦의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 = -2Q(1) + R \therefore Q(1) = \frac{1}{2}(R-1)$$

이 값을 ⑧에 대입하면

$$\begin{aligned} |Q(1) - R| &= \left| \frac{1}{2}(R-1) - R \right| = \frac{|R+1|}{2} \\ &= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1) \end{aligned}$$

13. 다항식 $f(x)$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지고 $x+4$ 로 나누면 3 이 남는다. $f(x)$ 를 $(x+2)^2(x+4)$ 로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $\frac{3}{4}(x+2)^2$

② $\frac{3}{2}(x+2)^2$

③ $3(x+2)^2$

④ $(x+2)(x+4)$

⑤ $3x^2 + 4x + 3$

해설

$f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 라 놓으면 $f(x)$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$ax^2 + bx + c = a(x+2)^2$$

$$\therefore f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + a(x+2)^2$$

또 $f(x)$ 를 $(x+4)$ 로 나눌 때 나머지가 3 이므로 $f(-4) = 3$

$$\therefore 4a = 3, a = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{구하는 나머지는 } \frac{3}{4}(x+2)^2$$

14. 4차의 다항식 $f(x)$ 가 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4}, f(4) = \frac{4}{5}$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라

$$f(n) = \frac{n}{n+1} (n=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$(n+1)f(n) - n = 0$$

$$g(x) = (x+1)f(x) - x \text{로 놓으면}$$

$$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$$

그런데 $g(x)$ 는 다항식이므로 나머지정리에 의해

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 를 인수로 갖는다.

또, $f(x)$ 가 4차식이므로 $g(x)$ 는 5차식이다.

$$\therefore g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) (a \neq 0) \cdots \textcircled{7}$$

그런데, $g(-1) = 1$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$$

$$g(x) = (x+1)f(x) - x$$

$$= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$$

$$\therefore f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

15. 다항식 $f(x)$ 는 다항식 $g(x)$ 로 나누어떨어진다. $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하고, $Q(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$ 라고 할 때, $f(x)$ 를 $\{g(x)\}^2$ 으로 나눈 몫과 나머지는?

- ① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$
- ② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$
- ③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$
- ④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$
- ⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) \cdots \textcircled{㉠}$$

$$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots \textcircled{㉡}$$

②을 ①에 대입하면

$$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$$

$r(x)$ 가 $g(x)$ 보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$ 는 $\{g(x)\}^2$ 보다 낮은 차수이다.

따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$ 이고 몫은 $h(x)$ 이다.

16. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) + 2 = 0, \alpha f(\alpha) + 2 = 0$

$$f(\alpha) = -2, \alpha = 1$$

$$\therefore f(1) = -2$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -3$$

17. 다음 중에서 $2x^3 - (4a + 3)x^2 + 2(3a - 1)x + 4a$ 의 인수인 것은?

① $2x + 1$

② $x + 2$

③ $x + 2a$

④ $x + a$

⑤ $2x - 1$

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 - (4a + 3)x^2 + 2(3a - 1)x + 4a \\ &= 2x^3 - 4ax^2 - 3x^2 + 6ax - 2x + 4a \\ &= (2x^3 - 3x^2 - 2x) - 2a(2x^2 - 3x - 2) \\ &= x(2x^2 - 3x - 2) - 2a(2x^2 - 3x - 2) \\ &= (2x^3 - 3x - 2)(x - 2a) \\ &= (x - 2a)(2x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

18. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 ㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 ㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 ㉤ $a = b$ 인 이등변삼각형
 ㉥ $b = c$ 인 이등변삼각형

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
 ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{ 에서}$$

$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$

$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$

$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} = 0$$

$$(a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

19. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b = -\sqrt{2}$, $b + c = \sqrt{2}$ 일 때, $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a)$ 의 값은?

① 0

② $\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{2}$

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a) \\ &= \{(a - b) + (b - c) + (c - a)\} \\ & \quad \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ & \quad - (a - b)(b - c) - (b - c)(c - a) - (c - a)(a - b)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

20. $a - b = 2 - \sqrt{3}$, $b - c = 2 + \sqrt{3}$ 인 세 수 a , b , c 에 대하여 $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ 의 값은?

① 4

② 3

③ 1

④ -2

⑤ -3

해설

$$a - b = 2 - \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b - c = 2 + \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 계산하면 $a - c = 4$

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

$$= a^2(b - c) + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$$

$$= a^2(b - c) - a(b^2 - c^2) + b^2c - c^2b$$

$$= a^2(b - c) - a(b + c)(b - c) + bc(b - c)$$

$$= (b - c)\{a^2 - a(b + c) + bc\}$$

$$= (b - c)(a - b)(a - c)$$

$$= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \cdot 4 = 4$$

21. 어느 회사의 A 공장과 B 공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A 공장에서는 모니터를 400 대, B 공장에서는 스피커를 10000 대 만든다. 모니터는 20000 대, 스피커는 80000 대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 50,000 원, 주말에는 70,000 원을 지불한다. 2008년 4월 1일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 390000 원

해설

4월 1일, 4월 2일 ... 을 각각 1, 2... 라 하면
12월 31일은 275이다.

모니터가 운반되는 날이 $5a + 1$ 이고

스피커가 운반되는 날이 $8b + 2$ 이면,

같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a + 1 = 8b + 2$

$b = 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ 를 대입하면

$b = 5k + 3$ 일 때, 성립한다.

그러므로 같은날 운반되는 경우

$\rightarrow 40k + 26$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) 이다.

금년에 같은 날 운반

26, 66, 106, 146, 186, 226, 266 이고,

이들 중 평일은 5일, 주말은 2일 이므로

$$(50000 \times 5) + (70000 \times 2) = 250000 + 140000 = 390000$$

22. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1$, $Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$P + Q = x \{ 2x^2 + (a + b)x + 2 \} \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

P , Q 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, P , Q 에는

x 라는 약수가 없으므로 $\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서 G 는

$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.

$$\therefore a - b = -2, a + b = -2$$

$$\therefore a = -2, b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -4$$

23. 두 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 과 $x^3 + bx^2 + ax + 1$ 의 최대공약수가 일차식일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

$A(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, $B(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$ 로 놓으면

$$A(x) - B(x)$$

$$= (x^3 + ax^2 + bx + 1) - (x^3 + bx^2 + ax + 1)$$

$$= (a - b)x(x - 1)$$

$A(x)$, $B(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로 최대공약수는 x 이거나 $x - 1$ 이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x - 1$ 이다.

따라서 다항식 $A(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$$A(1) = 1 + a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a + b = -2$$

24. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i - 2$

② $2i + 2$

③ $2i - 4$

④ $2i + 4$

⑤ $4i - 2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\ &= (i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}) \\ &\quad + (-1+2-3+\cdots+10) \\ &= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\ &= i+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i+4) + (-i-11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1+12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i-13) = i-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\ &= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4 \end{aligned}$$

25. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 α 의 켈레복소수, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켈레복소수이다.)

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $a = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

㉢ $\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉤ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.

㉥ $\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉤, ㉥

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)

㉠ $\alpha = \bar{\beta} \Rightarrow \beta = \bar{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ (참)

㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$ (거짓)

㉤ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

㉥ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0, b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

26. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 x, y 에 대하여 $\overline{\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$ 이므로

직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만
그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.

따라서 복소수의 켈레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해
보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1$, $\alpha\bar{\alpha} = \frac{3}{2}$ 이고

$z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)}{(\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1)} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + (\alpha + \bar{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore 7z\bar{z} = 7 \times \frac{3}{7} = 3$$

27. z 이 복소수일 때, $z^2 = \bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)가 되는 모든 z 의 합은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$z = a + bi \text{ 이면}$$

$$z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = a - bi = \bar{z}$$

$$a^2 - b^2 = a \cdots \textcircled{1}, 2ab = -b \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{i) } b = 0 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{에서 } a = 0, 1$$

$$\therefore z = 0 \text{ 또는 } 1$$

$$\text{ii) } a = -\frac{1}{2} \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{에서 } b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ 또는 } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

i), ii)에 따라 모든 z 의 합은 0

28. 실수가 아닌 복소수 z 가 $z^5 = 1$ 일 때,
 $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ -1

④ 5

⑤ -5

해설

$z^5 = 1$ 이므로 $z^5 - 1 = 0$ 에서

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$z \neq 1$ 이므로 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$$(\text{준식}) = (1-z)(1-z^4)(1-z^2)(1-z^3)$$

$$= (2-z-z^4)(2-z^2-z^3)$$

$$= 4 - (z + z^2 + z^3 + z^4)$$

$$= 5$$

29. $\sqrt{\frac{b+1}{a-1}} = -\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 을 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{(b-a+2)^2} + \sqrt{(2-a)^2} + \sqrt{(2+b)^2} = 0$ 을 만족하는 점의 자취 $p(a, b)$ 의 기울기를 구하면?

㉠ 1

㉡ -1

㉢ 2

㉣ $\frac{1}{2}$

㉤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$\sqrt{\frac{b+1}{a-1}} = -\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}} \text{ 에서}$$

$$a-1 < 0, b+1 \geq 0 \therefore b \geq -1, a < 1$$

$$\therefore b-a+2 = b+1 - (a-1) > 0$$

$$a-2 < 0, 2-a > 0$$

$$2+b > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= (b-a+2) + (2-a) + (b+2) \\ &= 2b-2a+6 \end{aligned}$$

$$\therefore 2b-2a+6 = 0 \text{ 에서 } b = a-3$$

$$\therefore \text{기울기는 } 1$$

30. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0 일 때 상수 a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$|x^2 + (a-2)x - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$$

$x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$

... ㉠

$x^2 + (a-2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$

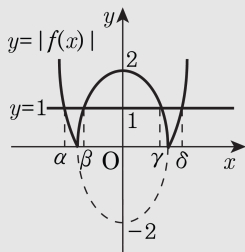
... ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a-2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore a-2 = 0, a = 2$

31. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$ 라 할 때, $f(x, y) = 0$ 이 두 개의 직선을 나타내도록 k 의 값을 정하면?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

$$f(x, y) = x^2 + (y + 2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$$

주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면

x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로

근의 공식에서 근호 안의 식($= D$)이 완전제곱꼴이어야 한다.

$$D = (y + 2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$$

$$= 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots (i)$$

(i)이 완전제곱식이어야 하므로

(i)의 판별식

$$\frac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$$

$$108 + 36k = 0 \quad \therefore k = -3$$

32. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\alpha\beta < 0 \text{ 이므로 } \frac{\beta}{\alpha} < 0, \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 &= \frac{\beta}{\alpha} - 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}\right) \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

해설

33. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 과 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b 의 관계식은?

① $a + b = 0$

② $a - b - 1 = 0$

③ $a - b + 1 = 0$

④ $a + b - 1 = 0$

⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$ 의 해를 α, β

$x^2 + 2bx + a = 0$ 의 해를 γ, δ 라 하면

$|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$ 에서

$$(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2,$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$$

$$(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$$

$$\therefore (a - b)(a + b + 1) = 0$$

$a \neq b$ 이므로 $a + b + 1 = 0$

34. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 6$, $xy + yz + zx = 9$ 를 만족할 때 x 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 한다. 이 때 $M - m$ 의 값을 구하면 ?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$y + z = 6 - x,$$

$$yz = 9 - x(y + z) = 9 - x(6 - x) = (x - 3)^2$$

실수 y, z 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$$t^2 - (6 - x)t + (x - 3)^2 = 0$$

$$D = (6 - x)^2 - 4(x - 3)^2 \geq 0 \text{에서 } x(x - 4) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 4$$

$$M = 4, m = 0 \quad \therefore M - m = 4$$

35. 사차방정식 $x^4 + 2ax^2 + a + 2 = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$

② $-2 < a < -1$

③ $-1 < a < 2$

④ $a > 2$

⑤ $-1 < a < 0$

해설

$x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2at + a + 2 = 0$$

서로 다른 양근을 가져야 하므로

$$(i) \frac{D}{4} = a^2 - a - 2 > 0 \quad \therefore a < -1, 2 < a$$

$$(ii) \alpha + \beta = -2a > 0 \quad \therefore a < 0$$

$$(iii) \alpha\beta = a + 2 > 0 \quad \therefore a > -2$$

$\therefore (i), (ii), (iii)$ 에서 $-2 < a < -1$