1. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R+R'B$　② $R'+RB$　③ RR'
④ R　⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
$A=BQ+R$ ⋯⋯ ㉠
$Q=B'Q'+R'$ ⋯⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$A=B(B'Q'+R')+R$
$=(BB')Q'+(R+R'B)$
$R+R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R+R'B<BB'$이어야 한다.
그런데 $R\le B-1$, $R'\le B'-1$이므로
$R+R'B\le(B-1)+(B'-1)B$
$=BB'-1<BB'$
따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R+R'B$이다.

2. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

3. $x^2 - x - 1 = 0$일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, −1　　② 4, 18　　③ 8, −1　　④ 9, −1　　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$의 양변을 x로 나누면

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$

$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$
$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

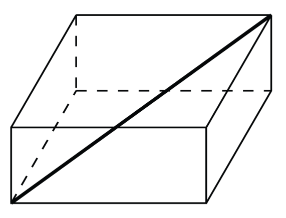
양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2-y+1) = 0$

$y^3 + 1 = 0$ $\therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$
$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

4. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c$는양수$)$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots$①

①에 각각 대입하면

$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$

$a^3+b^3+c^3=23$

5. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$일 때, $x^4+y^4+z^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0 = 4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx = -2$

$(xy+yz+zx)^2$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 4$

$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16 = x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4 = 8$

6. 임의의 실수 x, y에 대해서

$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$
$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$
각변끼리 빼주면
$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로
$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

7. 다항식 $x^{2005}+x^5+x^3+1$을 삼차식 x^3+x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는?

① x^2-3　② x^2+x-2　③ $-x^2-1$
④ $-x^2+x$　⑤ $x-1$

해설

$x^{2005}+x^5+x^3+1=(x^3+x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c=$
$(x+1)(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a-b+c=-2\cdots$ ㉠
$(x^2)^{1002}\times x+(x^2)^2\times x+x^2\times x+1$
$=(x+1)(x^2+1)Qx+ax^2+bx+c$에서
양변에 $x^2=-1$을 대입하면
$x+x-x+1=-a+bx+c$
$x+1=bx+c-a$
$\therefore\ b=1,\ c-a=1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2+x$

해설

$x^{2005}+x^5+x^3+1$
$=(x^3+x^2+x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=(x+1)(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x^2=-1$을 대입하면 좌변이 $x+1$
즉, 좌변의 식을 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1$
$x^{2005}+x^5+x^3+1$
$=(x+1)(x^2+1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$
$=(x^2+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+x+1$
양변에 $x=-1$을 대입하면 $-2=2a$
$\therefore\ a=-1$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2+x$

8. x에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면, $2^n(4+2a+b)=0$

$\therefore\ b=-2a-4(2^n\neq 0)\cdots$①

①을 준식에 대입하면,

$x^n(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

$x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$x^n(x+a+2)=(x-2)p(x)+2^n$

다시 $x=2$를 대입하면,

$2^n(4+a)=2^n \quad \therefore\ a=-3$

$a=-3$을 ①에 대입하면,

$b=(-2)(-3)-4=2$

$\therefore\ a=-3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1$

9. x에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$의 값은? (단, a_i는 상수이고 $i=0,\ 1,\ 2,\cdots,20$)

① 2^{10}　　② $2^{10}-1$　　③ 2

④ 1　　⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$이므로
$x=1$을 대입하면
$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots$㉠
또, 이 식에 $x=-1$을 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots$㉡
㉠ + ㉡을 하면 $2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$

10. x^{100} 을 $x+2$ 로 나눈 몫을 $a_{0+}a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}$ 라 할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1-2^{100})$　② $\frac{1}{6}(1-2^{100})$　③ $\frac{1}{4}(1-2^{100})$
④ $\frac{1}{3}(1-2^{100})$　⑤ 1

해설

(i) $f(x)=x^{100}=(x+2)Q(x)+R$ 라 하면
$f(-2)=2^{100}=R$
$\therefore\ R=2^{100}$
$f(1)=3Q(1)+R$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{3}(1-R)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

(ii) $Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{99}x^{99}$
$\therefore\ Q(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{99}$
$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_{99}=Q(1)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

11. 10차 다항식 $P(x)$가 $P(k)=\frac{k}{k+1}$(단, $k=0,1,\ 2,\ \cdots,\ 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ 1

해설

$P(k)=\frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k)-k=0$

$f(x)=(x+1)P(x)-x$라 하면

$f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots$

$=f(10)=0$인 다항식이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$

또, $f(-1)=1=a(-1)(-2)\cdots(-11)$

$=-a\cdot 11!$(단, $11!=1\times 2\times\cdots\times 11$)

$\therefore\ a=-\frac{1}{11!}$

$f(11)=12P(11)-11$

$=-\frac{1}{11!}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 1=-1$

$\therefore\ P(11)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

12. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0　　② 1

③ r_1　　④ $r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_n$

⑤ $r_1 r_2 \cdots\cdots r_n$

해설

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= (x-1)f_2(x) + r_1 \\
&= (x-1)\{(x-1)f_3(x) + r_2\} + r_1 \\
&= (x-1)^2 f_3(x) + r_2(x-1) + r_1 \\
&= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x) + r_3\} + r_2(x-1) + r_1 \\
&= (x-1)^3 f_4(x) + r_3(x-1)^2 + r_2(x-1) + r_1 \\
&\ \ \vdots \\
&= (x-1)^n f_{n+1}(x) + r_n(x-1)^{n-1} + r_{n-1}(x-1)^{n-2} + \cdots\cdots \\
&\qquad + r_2(x-1) + r_1
\end{aligned}
$$

$R(x) = r_n(x-1)^{n-1} + \cdots\cdots + r_2(x-1) + r_1$

$\therefore \ R(2) = r_n + r_{n-1} + \cdots\cdots + r_2 + r_1$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$는 $x+2$로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x+2$로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $x+f(x)$ ㉡ $x^2+f(x)g(x)$

㉢ $f(g(x))-x$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2)+g(-2)=0, f(-2)-g(-2)=4$
두식을 연립하면, $f(-2)=2,\ g(-2)=-2$
㉠ : $x+f(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면
$-2+f(-2)=0$
㉡ : $x^2+f(x)g(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면 $(-2)^2+f(-2)g(-2)=0$
㉢ : $f(g(x))-x \rightarrow x=-2$를 대입하면 $f(g(-2))-(-2)=f(-2)+2=4$

14. 다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-1)$, x^2+2x+2로 나눈 나머지가 각각 16, $-11x+2$라고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(0)$의 값은?

① 6　　② 8　　③ -2　　④ 1　　⑤ -4

해설

$R(x)$는 삼차 이하의 다항식이므로
$R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(x)=(x+2)(x-1)Q_1(x)+16\cdots$㉠
$f(x)=(x^2+2x+2)Q_2(x)-11x+2$
$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+(ax+k)(x^2+2x+2)-11x+2$
$=(x^2+2x+2)\{(x+2)(x-1)Q_3(x)+ax+k\}$
$-11x+2\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$f(1)=16=5(a+k)-11+2$
$\therefore\ a+k=5\cdots$㉢
$f(-2)=16=2(-2a+k)+22+2$
$\therefore\ -2a+k=-4\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=3,\ k=2$
따라서
$R(x)=(3x+2)(x^2+2x+2)-11x+2$
$\therefore R(0)=6$

15. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $g(x) = f(f(f(x)))$ 일 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지 $R(x)$에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $R(x)$는 0이다.　　② $R(x)$는 일차식이다.

③ $R(x)$는 이차식이다.　　④ $R(x)$의 상수항은 3이다.

⑤ $R(x)$의 상수항은 2이다.

해설

$f(x) = (x-3)(x-1)(x+1)$ 이고

$g(x) = f(x)Q(x) + R(x)$ 에서

$g(x) = (x-3)(x-1)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$

그런데 $g(x) = f(f(f(x)))$ 이므로

$g(1) = f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$

$g(-1) = f(f(f(-1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$

$g(3) = f(f(f(3))) = f(f(0)) = f(3) = 0$

$\therefore\ g(1) = a + b + c = 0,\ g(-1) = a - b + c = 0,$

$g(3) = 9a + 3b + c = 0$

$\therefore\ a = b = c = 0$

따라서 $R(x) = ax^2 + bx + c = 0$

16. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α가 될 수 있는 상수항 -2의 약수인 ± 1, ± 2을 준식에 차례로 대입해 보면

$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0,\ 4a + b = -9$

$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0,\ 4a + b = 9$

그런데, 위의 세 식은 a, b가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$\therefore\ \alpha = -2$ 이고 $4a + b = 9$

$\alpha = -2,\ a = 2,\ b = 1\ (\because\ a > b\ )$

$\therefore\ \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$

17. $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)}{bx+ay}+\dfrac{ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2+b^2y^2$
② $(ax+by)^2$
③ $(bx+ay)^2$
④ $2(a^2x^2+b^2y^2)$
⑤ $(ax+by)(bx+ay)$

해설

(분자)$= bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)$
$= bx(a^2x^2+b^2y^2)+2a^2bxy^2+ay(a^2x^2+b^2y^2)+2ab^2x^2y$
$= (a^2x^2+b^2y^2)(bx+ay)+2abxy(ay+bx)$
$= (bx+ay)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$= (bx+ay)(ax+by)^2$
따라서, (준 식)$= (ax+by)^2$

18. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$ ② $b+c$

③ $a+c$ ④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

(준 식) $=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$

$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$

$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$

$=3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$

$=3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$

19. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=0(\because\ a+b+c=0\ )$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore(\text{준식})=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$
$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$

20. x에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$를 만족한다. 이 때, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$
② $xf(x)$
③ $x(x+1)f(x)$
④ $(x-1)f(x)$
⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$에서
① 다항식 $f(x)$에 대하여 $x = 0, -1$을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$
② 다항식 $g(x)$에 대하여 $x = 1, -1$을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$
③ 다항식 $h(x)$에 대하여 $x = 0, 1$을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$
①, ②, ③으로부터
$f(x), g(x), h(x)$의 최대공약수를 G라 하면
$f(x) = x(x+1)G$, $g(x) = (x-1)(x+1)G$, $h(x) = x(x-1)G$
$\therefore$ $f(x), g(x), h(x)$의 최소공배수는
$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$

21. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3-(a+2)x^2-ax+2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$g(1) = 0$이므로 $g(x)$는 $x-1$를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -(a+2) & -a & 2a \\ & & 2 & -a & -2a \\ \hline & 2 & -a & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x) = (x-1)(2x^2-ax-2a)$
$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$이므로
최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$
 i) $(x-1)(x+1)$ 일 때
$2(-1)^2 - a(-1) - 2a = 0$에서 $a = 2$
$\therefore\ g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$
 ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때
$2(-1)^2 - a(-2) - 2a = 0-8 \neq 0$
 i) , ii) 에서
$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$이고 $a = 2$

22. 다음 두 다항식 A, B의 최대공약수가 이차식일 때, 상수 a, b의 값의 곱 ab를 구하면?
$A = x^3 - ax - 2$ $B = x^3 - 2x^2 + bx + 2$

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} A = x^3 - ax - 2 \\ B = x^3 - 2x^2 + bx + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = x(2x^2 - 2x - a + b) \\ A - B = 2x^2 - (a+b)x - 4 \end{cases}$$

A, B의 최대공약수는 $A+B$, $A-B$의 최대공약수와 일치하고 x는 A, B의 공약수가 아니다.
$\therefore\ 2x^2 - 2x - a + b = 2x^2 - (a+b)x - 4$
$\therefore\ a + b = 2,\ -a + b = -4$
$\therefore\ a = 3,\ b = -1$
따라서, $ab = -3$

23. a, b가 정수이고, $P(x) = x^2 + ax + b$라 한다. x의 다항식 $P(x)$가 $x^4 + 6x^2 + 25$, $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$의 공약수일 때, $P(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x^4 + 6x^2 + 25 = P(x)A(x) \ \cdots$ ①
$3x^4 + 4x^2 + 28x + 5 = P(x)B(x) \ \cdots$ ②라 하고,
① $\times 3 -$ ② 하면
$P(x)\{3A(x) - B(x)\} = 14x^2 - 28x + 70$
$= 14(x^2 - 2x + 5)$
그런데 $P(x) = x^2 + ax + b$ 이므로
$P(x) = x^2 - 2x + 5 \quad \therefore \ P(3) = 8$

24. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i,\ \frac{1-i}{1+i} = -i$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}\\ &= (-i)^{50} + (i)^{50}\\ &= (-i)^2 + (i)^2\\ &= -2\end{aligned}$$

25. 자연수 n에 대하여 $f(n) = ni^n$을 만족할 때, $f(1) + f(2) + ... + f(100) + f(101) = x + yi$이다. 이 때, 실수 x, y에 대하여 $y - x$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(100) + f(101)$$
$$= i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 100i^{100} + 101i^{101}$$
$$= i - 2 - 3i + 4 + 5i + \cdots + 100 + 101i$$
$$= (-2 + 4 - 6 + 8 + \cdots - 98 + 100)$$
$$\quad + (1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 97 - 99 + 101)i$$
$$= 2 \times 25 + \{(-2) \times 25 + 101\}i$$
$$= 50 + 51i$$
$$\therefore\ x = 50,\ y = 51,\ y - x = 51 - 50 = 1$$

26. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i,\ y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots$ ①, $y^2 - x = i \cdots$ ② 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

27.

두 복소수 α, β 를 $\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$, $\beta = (3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}$ 이라 할 때, α 는 (가) 이고, β 는(도) (나) 이다.

다음 중 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 양의 실수, 음의 실수　　② 음의 실수, 양의 실수

③ 실수, 순허수　　④ 순허수, 실수

⑤ 순허수, 순허수

해설

$\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$ 을 직접 계산하기는 어렵다.
따라서 $\overline{\alpha}$ 를 구하여 α 와 $\overline{\alpha}$ 의 관계를 살펴본다.

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \overline{(3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} + (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} + (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= \alpha\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\alpha} = \alpha$ 이므로 α 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\overline{\beta} &= \overline{(3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} - (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} - (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= -\beta\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\beta} = -\beta$ 이므로 β 는 순허수이다.

28. 복소수 $z = x+yi$ (단, x, y 는 실수이고, $i = \sqrt{-1}$) 에 대하여 $z\bar{z}+z+\bar{z} = 0$ 을 만족시키는 점(x, y) 가 좌표평면 위에서 나타내는 도형을 구하면?

① 두 점　　② 네 점　　③ 직선

④ 원　　⑤ 포물선

해설

$z = x + yi,\ \bar{z} = x - yi$ 에서

$$\begin{aligned} 0 &= z\bar{z} + z + \bar{z} \\ &= (x+yi)(x-yi) + (x+yi) + (x-yi) \\ &= x^2 + y^2 + 2x \end{aligned}$$

따라서, $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 인 원을 나타낸다.

29. $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ 일 때 $x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \frac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\frac{-5 + \sqrt{3}i}{4}$

해설

$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ 에서 $2x + 1 = \sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + x + 1 = 0 \therefore\ x + \frac{1}{x} = -1$

$$\therefore\ (\text{준식}) = x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x - 1}}$$

$$= x + \frac{x - 1}{x^2 - x + 1}$$

$$= x + \frac{x - 1}{-2x}$$

$$= \frac{-2x^2 + x - 1}{-2x}$$

$$= \frac{-2(-x - 1) + x - 1}{-2x}$$

$$= \frac{3x + 1}{-2x}$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{-5 + \sqrt{3}i}{4}$$

30. a, b가 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$중 하나일 때, 등식 $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 조건은

ⅰ) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ⅱ) $a-b<0$ 이고 $a+b>0$

ⅰ)의 경우 $(-2,\ 2)\ (2,\ -2)\ (-1,\ 1)\ (1,\ -1)$

ⅱ)의 경우 $(-1,\ 2)\ (0,\ 2)\ (0,\ 1)\ (1,\ 2)$

$\therefore$ 모두 8개

31. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\dfrac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\dfrac{D_1}{4}+\dfrac{D_2}{4}+\dfrac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\dfrac{D_1}{4}$, $\dfrac{D_2}{4}$, $\dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

32. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.
② 정수가 아닌 유리수이다.
③ 정수이다.
④ 홀수인 자연수이다.
⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a$(정수) , $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -b$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= a^2$(정수)

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

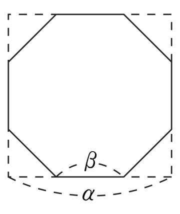
$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b$(정수)

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.

33. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α, β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$

② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$

③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로

다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha$이므로

$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)\alpha$

α, β는 $x^2 + px + (\sqrt{2}+1) = 0$의 두 근이므로

$\alpha\beta = (\sqrt{2}-1)\alpha^2 = \sqrt{2}+1$에서

$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha > 0$이므로 $\alpha = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ p = -(\alpha+\beta) = -\left\{\alpha + (\sqrt{2}-1)\alpha\right\} = -\sqrt{2} - 2$

34. 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n에 대하여 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+(㉮)x+(㉯)=0$이다. ㉮와 ㉯에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0$
$\therefore\ \alpha^3=1,\ \beta^3=1$
한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$
㉠: $n=3k+1$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\ \cdot\alpha+(\beta^3)^k\ \cdot\beta$
$=\alpha+\beta=-1$
㉡: $n=3k+2$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\alpha^2+(\beta^3)^k\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=1-2=-1$
㉠, ㉡에서 n이 3의 배수가 아니면
$\alpha^n+\beta^n=-1,\ \alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1$
따라서 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2+x+1=0\ \therefore$ ㉮ $=1$, ㉯ $=1$

35. 사차방정식 $x^4 - ax^2 + (a+1) = 0$이 서로 다른 두 개의 실근과 두 개의 허근을 갖기 위한 실수 a의 범위는?

① $a < -1$

② $a > 1$

③ $-1 < a < 2(1-\sqrt{2})$

④ $1 < a < 2(1+\sqrt{2})$

⑤ $2(1-\sqrt{2}) < a < 2(1+\sqrt{2})$

해설

$X = x^2$ 으로 놓으면,
$X^2 - aX + (a+1) = 0 \cdots\cdots$ ㉠
주어진 사차방정식이 두 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 방정식 ㉠이 양근 하나 음근 하나를 가져야 한다.
$\therefore$(두 근의 곱) $= a + 1 < 0$
$\therefore\ a < -1$