

1. A 를 B 로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 라 하고, Q 를 B' 으로 나눈 몫은 Q' , 나머지는 R' 이라 한다. A 를 BB' 으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R + R'B$

② $R' + RB$

③ RR'

④ R

⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$$A = BQ + R \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$Q = B'Q' + R' \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} A &= B(B'Q' + R') + R \\ &= (BB')Q' + (R + R'B) \end{aligned}$$

$R + R'B$ 가 A 를 BB' 로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$ 이어야 한다.

그런데 $R \leq B - 1$, $R' \leq B' - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} R + R'B &\leq (B - 1) + (B' - 1)B \\ &= BB' - 1 < BB' \end{aligned}$$

따라서 A 를 BB' 으로 나눈 나머지는 $R + R'B$ 이다.

2. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{에서}$$

$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$

$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$

(좌변)

$$= \{(a-b) + c\}\{(a-b) - c\} + \{(a+b) + c\}\{(a+b) - c\}$$

$$= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$

$$\text{따라서, } 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0 \text{ 이므로 } a^2 + b^2 = c^2$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

3. $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때, $\frac{y^{10} + 1}{y^2}$ 의 값은?

- ① 4, -1 ② 4, 18 ③ 8, -1 ④ 9, -1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4\end{aligned}$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때

$$y + \frac{1}{y} = 1 \text{ 에서 } \frac{y^2 + 1}{y} = 1$$

$$\therefore y^2 - y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{\Gamma}$$

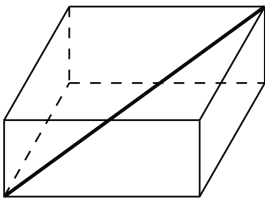
양변에 $(y + 1)$ 을 곱하면 $(y + 1)(y^2 - y + 1) = 0$

$$y^3 + 1 = 0 \therefore y^3 = -1 \cdots \cdots \textcircled{\Delta}$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\Delta}$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{y^{10} + 1}{y^2} &= \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y + 1}{y^2} \\ &= \frac{-y^2}{y^2} = -1\end{aligned}$$

4. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겹넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



① 12

② 18

③ 21

④ 23

⑤ 30

해설

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b + c)^2 = 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdots \textcircled{1}$$

①에 각각 대입하면

$$a^3 + b^3 + c^3 - 18 = 5 \times (9 - 8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 23$$

5. $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 일 때, $x^4 + y^4 + z^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$0 = 4 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore xy + yz + zx = -2$$

$$(xy + yz + zx)^2$$

$$= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(xy^2z + xyz^2 + x^2yz)$$

$$= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)$$

$$4 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 0$$

$$\therefore x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 4$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$16 = x^4 + y^4 + z^4 + 2 \cdot 4$$

$$\therefore x^4 + y^4 + z^4 = 8$$

6. 임의의 실수 x, y 에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y - 1) + x_2(y - 1)^2 + x_3(y - 1)^3 + \cdots + x_{12}(y - 1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11}

② 2^{12}

③ 2^{13}

④ 3^{11}

⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

7. 다항식 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$ 을 삼차식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① $x^2 - 3$

② $x^2 + x - 2$

③ $-x^2 - 1$

④ $-x^2 + x$

⑤ $x - 1$

해설

$$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $a - b + c = -2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$$(x^2)^{1002} \times x + (x^2)^2 \times x + x^2 \times x + 1 = (x+1)(x^2+1)Qx + ax^2 + bx + c$$

에서 양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면

$$x + x - x + 1 = -a + bx + c$$

$$x + 1 = bx + c - a$$

$$\therefore b = 1, c - a = 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $a = -1, b = 1, c = 0$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

해설

$$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$$

$$= (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 좌변이 $x + 1$

즉, 좌변의 식을 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 1$

따라서 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1$

$$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$$

$$= (x+1)(x^2+1)Q(x) + a(x^2+1) + x + 1$$

$$= (x^2+1)\{(x+1)Q(x) + a\} + x + 1$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-2 = 2a$

$$\therefore a = -1$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

8. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 5

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식에 $x = 2$ 를 대입하면, $2^n(4 + 2a + b) = 0$

$$\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \cdots \textcircled{1}$$

①을 준식에 대입하면,

$$x^n(x^2 + ax - 2a - 4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$$x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$$

다시 $x = 2$ 를 대입하면,

$$2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면,

$$b = (-2)(-3) - 4 = 2$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$

9. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i = 0, 1, 2, \cdots, 20$)

① 2^{10}

② $2^{10} - 1$

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이므로
 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = 1$$

10. x^{100} 을 $x + 2$ 로 나눈 몫을 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1 - 2^{100})$

② $\frac{1}{6}(1 - 2^{100})$

③ $\frac{1}{4}(1 - 2^{100})$

④ $\frac{1}{3}(1 - 2^{100})$

⑤ 1

해설

(i) $f(x) = x^{100} = (x + 2)Q(x) + R$ 라 하면

$$f(-2) = 2^{100} = R$$

$$\therefore R = 2^{100}$$

$$f(1) = 3Q(1) + R$$

$$\therefore Q(1) = \frac{1}{3}(1 - R) = \frac{1}{3}(1 - 2^{100})$$

(ii) $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{99}x^{99}$

$$\therefore Q(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{99}$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_{99} = Q(1) = \frac{1}{3}(1 - 2^{100})$$

11. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{ 는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots$$

$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\cdots(-11)$$

$$= -a \cdot 11! \text{ (단, } 11! = 1 \times 2 \times \cdots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

12. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② 1

③ r_1

④ $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$

⑤ $r_1 r_2 \cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (x-1)f_2(x) + r_1 \\
 &= (x-1)\{(x-1)f_3(x) + r_2\} + r_1 \\
 &= (x-1)^2 f_3(x) + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^2 \{(x-1)f_4(x) + r_3\} + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^3 f_4(x) + r_3(x-1)^2 + r_2(x-1) + r_1 \\
 &\quad \vdots \\
 &= (x-1)^n f_{n+1}(x) + r_n(x-1)^{n-1} + r_{n-1}(x-1)^{n-2} + \cdots \\
 &\quad \quad \quad + r_2(x-1) + r_1 \\
 R(x) &= r_n(x-1)^{n-1} + \cdots + r_2(x-1) + r_1 \\
 \therefore R(2) &= r_n + r_{n-1} + \cdots + r_2 + r_1
 \end{aligned}$$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 는 $x+2$ 로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x+2$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $x + f(x)$

㉡ $x^2 + f(x)g(x)$

㉢ $f(g(x)) - x$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2) + g(-2) = 0, f(-2) - g(-2) = 4$
두식을 연립하면, $f(-2) = 2, g(-2) = -2$

㉠ : $x + f(x) \rightarrow x = -2$ 를 대입하면

$$-2 + f(-2) = 0$$

㉡ : $x^2 + f(x)g(x) \rightarrow x = -2$ 를 대입하면 $(-2)^2 + f(-2)g(-2) = 0$

㉢ : $f(g(x)) - x \rightarrow x = -2$ 를 대입하면 $f(g(-2)) - (-2) = f(-2) + 2 = 4$

14. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)$, x^2+2x+2 로 나눈 나머지가 각각 16, $-11x+2$ 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 하면 $R(0)$ 의 값은?

① 6

② 8

③ -2

④ 1

⑤ -4

해설

$R(x)$ 는 삼차 이하의 다항식이므로

$R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하면

$$f(x) = (x+2)(x-1)Q_1(x) + 16 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$f(x) = (x^2+2x+2)Q_2(x) - 11x + 2$$

$$f(x) = (x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$= (x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x) + (ax+k)(x^2+2x+2) - 11x + 2$$

$$= (x^2+2x+2)\{(x+2)(x-1)Q_3(x) + ax + k\}$$

$$- 11x + 2 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡에서

$$f(1) = 16 = 5(a+k) - 11 + 2$$

$$\therefore a+k = 5 \cdots \textcircled{\text{㉢}}$$

$$f(-2) = 16 = 2(-2a+k) + 22 + 2$$

$$\therefore -2a+k = -4 \cdots \textcircled{\text{㉣}}$$

$$\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}\text{에서 } a=3, k=2$$

따라서

$$R(x) = (3x+2)(x^2+2x+2) - 11x + 2$$

$$\therefore R(0) = 6$$

15. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $g(x) = f(f(f(x)))$ 일 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나누는 나머지 $R(x)$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① $R(x)$ 는 0이다. ② $R(x)$ 는 일차식이다.
 ③ $R(x)$ 는 이차식이다. ④ $R(x)$ 의 상수항은 3이다.
 ⑤ $R(x)$ 의 상수항은 2이다.

해설

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x+1) \text{ 이고}$$

$$g(x) = f(x)Q(x) + R(x) \text{ 에서}$$

$$g(x) = (x-3)(x-1)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$\text{그런데 } g(x) = f(f(f(x))) \text{ 이므로}$$

$$g(1) = f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$$

$$g(-1) = f(f(f(-1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$$

$$g(3) = f(f(f(3))) = f(f(0)) = f(3) = 0$$

$$\therefore g(1) = a + b + c = 0, \quad g(-1) = a - b + c = 0,$$

$$g(3) = 9a + 3b + c = 0$$

$$\therefore a = b = c = 0$$

$$\text{따라서 } R(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

16. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α 가 될 수 있는 상수항 -2 의 약수인 $\pm 1, \pm 2$ 을 준식에 차례로 대입해 보면

$$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0, 4a + b = -9$$

$$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0, 4a + b = 9$$

그런데, 위의 세 식은 a, b 가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 이고 } 4a + b = 9$$

$$\alpha = -2, a = 2, b = 1 (\because a > b)$$

$$\therefore \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$$

17. $\frac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2)}{bx + ay} + \frac{ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2 + b^2y^2$

② $(ax + by)^2$

③ $(bx + ay)^2$

④ $2(a^2x^2 + b^2y^2)$

⑤ $(ax + by)(bx + ay)$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{분자}) &= bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2) + ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2) \\
 &= bx(a^2x^2 + b^2y^2) + 2a^2bxy^2 + ay(a^2x^2 + b^2y^2) + 2ab^2x^2y \\
 &= (a^2x^2 + b^2y^2)(bx + ay) + 2abxy(ay + bx) \\
 &= (bx + ay)(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\
 &= (bx + ay)(ax + by)^2
 \end{aligned}$$

따라서, (준 식) = $(ax + by)^2$

18. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a + b$

② $b + c$

③ $a + c$

④ $a^2 + ab + bc + ca$

⑤ $a^2 + 2ab + b^2$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \{(a + b + c)^3 - a^3\} - (b^3 + c^3) \\&= (a + b + c - a)\{(a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2\} \\&\quad - (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\&= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) \\&= 3(b + c)(a^2 + ab + bc + ca) \\&= 3(b + c)\{a(a + b) + c(a + b)\} \\&= 3(a + b)(b + c)(c + a)\end{aligned}$$

19. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= 0 (\because a+b+c=0) \\ &\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\ &\therefore (\text{준식}) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} + \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ca+ab}{abc} \right) \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3abc} = 0 \end{aligned}$$

20. x 에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$ 가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$ 를 만족한다. 이 때, $f(x), g(x), h(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$

② $xf(x)$

③ $x(x+1)f(x)$

④ $(x-1)f(x)$

⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$ 에서

① 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $x = 0, -1$ 을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$

② 다항식 $g(x)$ 에 대하여 $x = 1, -1$ 을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$

③ 다항식 $h(x)$ 에 대하여 $x = 0, 1$ 을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$
①, ②, ③으로부터

$f(x), g(x), h(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$f(x) = x(x+1)G, g(x) = (x-1)(x+1)G, h(x) = x(x-1)G$

$\therefore f(x), g(x), h(x)$ 의 최소공배수는

$$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$$

21. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3 - (a+2)x^2 - ax + 2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x-1$ 를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

1	2	$-(a+2)$	$-a$	$2a$
		2	$-a$	$-2a$
	2	$-a$	$-2a$	0

$$g(x) = (x-1)(2x^2 - ax - 2a)$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \text{ 이므로}$$

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

i) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-1) - 2a = 0 \text{ 에서 } a = 2$$

$$\therefore g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$$

ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-2) - 2a = 0 \rightarrow 0 \neq 0$$

i), ii) 에서

$$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2) \text{ 이고 } a = 2$$

22. 다음 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 이차식일 때, 상수 a, b 의 값의 곱 ab 를 구하면?

$$A = x^3 - ax - 2 \quad B = x^3 - 2x^2 + bx + 2$$

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{cases} A = x^3 - ax - 2 \\ B = x^3 - 2x^2 + bx + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = x(2x^2 - 2x - a + b) \\ A - B = 2x^2 - (a + b)x - 4 \end{cases}$$

A, B 의 최대공약수는 $A + B, A - B$ 의 최대공약수와 일치하고 x 는 A, B 의 공약수가 아니다.

$$\therefore 2x^2 - 2x - a + b = 2x^2 - (a + b)x - 4$$

$$\therefore a + b = 2, \quad -a + b = -4$$

$$\therefore a = 3, \quad b = -1$$

따라서, $ab = -3$

23. a, b 가 정수이고, $P(x) = x^2 + ax + b$ 라 한다. x 의 다항식 $P(x)$ 가 $x^4 + 6x^2 + 25$, $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ 의 공약수일 때, $P(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$x^4 + 6x^2 + 25 = P(x)A(x) \cdots \textcircled{1}$$

$$3x^4 + 4x^2 + 28x + 5 = P(x)B(x) \cdots \textcircled{2} \text{라 하고,}$$

$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2}$ 하면

$$\begin{aligned} P(x)\{3A(x) - B(x)\} &= 14x^2 - 28x + 70 \\ &= 14(x^2 - 2x + 5) \end{aligned}$$

그런데 $P(x) = x^2 + ax + b$ 이므로

$$P(x) = x^2 - 2x + 5 \quad \therefore P(3) = 8$$

24. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} + (i)^{50} \\ &= (-i)^2 + (i)^2 \\ &= -2\end{aligned}$$

25. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = ni^n$ 을 만족할 때, $f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101) = x + yi$ 이다. 이 때, 실수 x, y 에 대하여 $y - x$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}
 & f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101) \\
 &= i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 100i^{100} + 101i^{101} \\
 &= i - 2 - 3i + 4 + 5i + \dots + 100 + 101i \\
 &= (-2 + 4 - 6 + 8 + \dots - 98 + 100) \\
 &\quad + (1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 97 - 99 + 101)i \\
 &= 2 \times 25 + \{(-2) \times 25 + 101\}i \\
 &= 50 + 51i \\
 &\therefore x = 50, y = 51, y - x = 51 - 50 = 1
 \end{aligned}$$

26. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots \textcircled{1}$, $y^2 - x = i \cdots \textcircled{2}$ 에서

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 : $(x + y)(x - y) + (x - y) = 0$,

$$(x - y)(x + y + 1) = 0$$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x + y)^2 - 2xy - (x + y) = 2i$

$$\therefore xy = 1 - i$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= (-1)^3 - 3(1 - i)(-1)$$

$$= 2 - 3i$$

두 복소수 α, β 를 $\alpha = (3 + 4i)^{10} + (3 - 4i)^{10}$, $\beta = (3 + 4i)^{10} - (3 - 4i)^{10}$ 이라 할 때, α 는 (가) 이고, β 는 (도) (나) 이다.

다음 중 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

- ① 양의 실수, 음의 실수 ② 음의 실수, 양의 실수
 ③ 실수, 순허수 ④ 순허수, 실수
 ⑤ 순허수, 순허수

해설

$\alpha = (3 + 4i)^{10} + (3 - 4i)^{10}$ 을 직접 계산하기는 어렵다.
 따라서 $\bar{\alpha}$ 를 구하여 α 와 $\bar{\alpha}$ 의 관계를 살펴본다.

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \overline{(3 + 4i)^{10} + (3 - 4i)^{10}} \\ &= \overline{(3 + 4i)^{10}} + \overline{(3 - 4i)^{10}} \Leftarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ &= (3 - 4i)^{10} + (3 + 4i)^{10} \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= \alpha\end{aligned}$$

따라서 $\bar{\alpha} = \alpha$ 이므로 α 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &= \overline{(3 + 4i)^{10} - (3 - 4i)^{10}} \\ &= \overline{(3 + 4i)^{10}} - \overline{(3 - 4i)^{10}} \Leftarrow \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ &= (3 - 4i)^{10} - (3 + 4i)^{10} \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= -\beta\end{aligned}$$

따라서 $\bar{\beta} = -\beta$ 이므로 β 는 순허수이다.

28. 복소수 $z = x + yi$ (단, x, y 는 실수이고, $i = \sqrt{-1}$) 에 대하여 $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$ 을 만족시키는 점 (x, y) 가 좌표평면 위에서 나타내는 도형을 구하면?

① 두 점

② 네 점

③ 직선

④ 원

⑤ 포물선

해설

$z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ 에서

$$0 = z\bar{z} + z + \bar{z}$$

$$= (x + yi)(x - yi) + (x + yi) + (x - yi)$$

$$= x^2 + y^2 + 2x$$

따라서, $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 인 원을 나타낸다.

29. $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ 일 때 $x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-5 + \sqrt{3}i}{4}$

해설

$$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) \text{ 에서 } 2x + 1 = \sqrt{3}i$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + x + 1 = 0 \therefore x + \frac{1}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x - 1}}} \\ &= x + \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \\ &= x + \frac{-2x}{x - 1} \\ &= \frac{-2x^2 + x - 1}{x - 1} \\ &= \frac{-2(-x - 1) + x - 1}{x - 1} \\ &= \frac{3x + 1}{x - 1} \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2x} \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{-5 + \sqrt{3}i}{4} \end{aligned}$$

30. a, b 가 $-2, -1, 0, 1, 2$ 중 하나일 때, 등식 $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 를 만족시키는 조건은

i) $a+b=0$ 이고 $a-b \neq 0$

ii) $a-b < 0$ 이고 $a+b > 0$

i)의 경우 $(-2, 2) (2, -2) (-1, 1) (1, -1)$

ii)의 경우 $(-1, 2) (0, 2) (0, 1) (1, 2)$

$\therefore$ 모두 8개

31. 세 방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$, $x^2 + 2bx + ca = 0$, $x^2 + 2cx + ab = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c 는 실수)

- ① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.
- ② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.
- ③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.
- ④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.
- ⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - bc,$$

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - ca,$$

$$\frac{D_3}{4} = c^2 - ab \text{라 하면}$$

$$\frac{D_1}{4} + \frac{D_2}{4} + \frac{D_3}{4}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

32. 정수 a, b 에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.

② 정수가 아닌 유리수이다.

③ 정수이다.

④ 홀수인 자연수이다.

⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -a(\text{정수}), \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -b$$

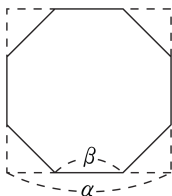
$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= a^2(\text{정수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b(\text{정수}) \end{aligned}$$

그러나 $a > 0, b > 0$ 이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 은 자연수가 되지 않는다.

33. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α 인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p 의 값으로 옳은 것은?



- ① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$
 ② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
 ③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$
 ④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$
 ⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β 인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$ 이다.

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha \text{ 이므로}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)\alpha$$

α, β 는 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이므로 $\alpha\beta = (\sqrt{2} - 1)\alpha^2 = \sqrt{2} + 1$ 에서

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore p = -(\alpha + \beta) = -\{\alpha + (\sqrt{2} - 1)\alpha\} = -\sqrt{2} - 2$$

34. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{㉠})x + (\textcircled{㉡}) = 0$ 이다. ㉠과 ㉡에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 1 - 2 = -1$$

㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면

$$\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$$

따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{㉠} = 1, \textcircled{㉡} = 1$$

35. 사차방정식 $x^4 - ax^2 + (a+1) = 0$ 이 서로 다른 두 개의 실근과 두 개의 허근을 갖기 위한 실수 a 의 범위는?

- ① $a < -1$
② $a > 1$
③ $-1 < a < 2(1 - \sqrt{2})$
④ $1 < a < 2(1 + \sqrt{2})$
⑤ $2(1 - \sqrt{2}) < a < 2(1 + \sqrt{2})$

해설

$X = x^2$ 으로 놓으면,

$$X^2 - aX + (a+1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

주어진 사차방정식이 두 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 방정식 $\textcircled{7}$ 이 양근 하나 음근 하나를 가져야 한다.

$$\therefore (\text{두 근의 곱}) = a+1 < 0$$

$$\therefore a < -1$$