

1. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서

원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은

$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

2. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} (\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c} = -\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 2k, \quad b = 3k, \quad c = 4k$$

$$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c} = \frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k} = \frac{-k}{13k} = -\frac{1}{13}$$

$$\therefore p = 13, q = 1 \quad p+q = 14$$

3. 곡선 $xy + x - 3y - 2 = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

- ① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면 ③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면 ⑤ 없다.

해설

$xy + x - 3y - 2 = 0$ 을 y 에 대하여
정리하면 $(x - 3)y = -x + 2$

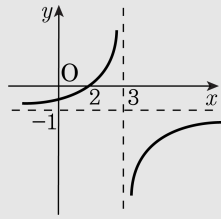
$$\therefore y = \frac{-x + 2}{x - 3} = \frac{-1}{x - 3} - 1 (x \neq 3)$$

즉, $y = \frac{-1}{x - 3} - 1$ 은 점근선이

$x = 3$, $y = -1$ 이고 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

그래프는 다음 그림과 같다. 따라서,

제 2 사분면을 지나지 않는다.



4. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
 $(x - 1)(3x^2 + ax + 2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1)$$

$\therefore 3x^2 + ax + 2a$ 는

$x + 2$ 또는 $x + 1$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$ 로 놓을 때

$x + 2$ 가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$ 가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x + 1$ 을 인수로 갖는다.

$x + 1$ 이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$

$\therefore a = -3$

5. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : $\frac{9}{2}$ m

해설

$h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 에서 $h = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{9}{2}$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{9}{2}$ m 이다.

6. $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $A^c \subset B^c$

② $A \cup B^c = U$

③ $A - B = \emptyset$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cap B = B$

해설

③ 집합 A 가 B 에 포함되면 $A - B = \emptyset$ 이 성립하게 된다.

7. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 빈칸에 알맞은 것은?

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup ($ $)$

- ① $A \cap B$

② $A \cap B^c$

③ $(A \cap B)^c$
- ④ $A^c \cup B$

⑤ $A \cup B^c$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup ($ $)$ 에서
 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이고,
 $(A^c \cap B) \cup ($ $) = (B - A) \cup ($ $)$ 이므로,
빈칸에는 $A - B$ 에 해당하는 식인 $A \cap B^c$ 이 들어와야 한다.

8. 100 명의 학생 중 영어를 좋아하는 학생은 65 명, 수학을 좋아하는 학생은 52 명이다. 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

- ① 65 ② 52 ③ 48 ④ 35 ⑤ 17

해설

전체집합을 U , 영어를 좋아하는 학생의 집합을 A , 수학을 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \cdots \textcircled{㉠}$
 $n(A \cup B) \leq n(U) = 100 \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $100 \geq 65 + 52 - n(A \cap B)$
 $n(A \cap B) \geq 65 + 52 - 100 = 17$
 $\therefore n(A \cap B) \geq 17$

(ii) $n(A \cap B) \leq n(A)$ 이고 $n(A \cap B) \leq n(B)$
따라서 $n(A \cap B) \leq 65$ 이고 $n(A \cap B) \leq 52$
 $\therefore n(A \cap B) \leq 52$
(i), (ii)에서 $17 \leq n(A \cap B) \leq 52$
 $\therefore M = 52, m = 17 \quad M - m = 35$

9. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ 를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수)이다. $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow x+y=5k, y+z=6k, z+x=7k$$

$$\text{세 식을 모두 더하여 정리하면 } x+y+z=9k$$

$$\text{다시 식에 대입하면 } x=3k, y=2k, z=4k$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - y^2 + z^2} \\ &= \frac{25k^2 - 16k^2}{9k^2 - 4k^2 + 16k^2} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore m=7, n=3$$

$$\therefore m+n=10$$

10. 5 원짜리 동전 4 개, 10 원짜리 동전 2 개, 100 원짜리 동전 1 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 17가지

해설

5 원짜리 동전 4 개이면 10 원짜리 동전 2 개와 같으므로 금액이 중복된다.

10 원짜리 동전 2 개를 5 원짜리 동전 4 개로 바꾸면 5 원짜리 동전 8 개, 100 원짜리 동전 1 개가 되고 지불 방법의 수는 $(8 + 1) \times (1 + 1) = 18$ 가지

돈이 0 원이면 지불하는 것이 아니므로

$18 - 1 = 17$ 가지

11. 100 원, 300 원, 500 원짜리 3 종류의 사탕이 있다. 이 사탕을 1000 원어치 사는 방법의 수는?

① 7 개 ② 10 개 ③ 13 개 ④ 15 개 ⑤ 17 개

해설

500 원을 기준으로 생각한다.
100 원을 A , 300 원을 B 라 하면,
(1) 500 원 0 개 :
 $(A, B) = (1, 3), (4, 2), (7, 1), (10, 0)$
(2) 500 원 1 개 : $(A, B) = (2, 1), (5, 0)$
(3) 500 원 2 개 : $(A, B) = (0, 0)$
∴ 총 7 개

12. 1 부터 999 까지의 자연수 중에서 각 자리에 7 인 숫자가 2 개 이상인 경우의 수는?

① 26 개 ② 27 개 ③ 28 개 ④ 29 개 ⑤ 30 개

해설

① 7이 2개 있는 수 : 77 이 1 개,
77□폴이 9 개,
7□7 폴이 9 개,
□77 폴이 8 개
② 7 이 3개 있는 수, 777 로 1 개
따라서 구하는 경우의 수는
 $1 + 9 + 9 + 8 + 1 = 28$ (개)

13. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 만들 수 있는 세 자리의 정수는 몇 개인가?

① 60 ② 80 ③ 100 ④ 125 ⑤ 180

해설

백의 자리 : 0 을 제외한 5 개 숫자를 모두 사용

십의 자리 : 백의 자리에 사용한 수를 제외한 5 개

일의 자리 : 백의 자리, 십의 자리에 사용한 수 2 개를 제외한 4 개

$$\therefore 5 \times 5 \times 4 = 100$$

14. 7 송이의 서로 다른 종류의 꽃을 3 송이, 2 송이, 2 송이의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는?

① 105 ② 120 ③ 210 ④ 630 ⑤ 1260

해설

7 송이를 3, 2, 2 송이로 나누는 방법의 수는,

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 1 \times \frac{1}{2 \cdot 1} = 105$$

15. x^2 의 계수가 1인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2 + 5x - 3$ 이고
최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 이다. $f(0) = 3$, $g(0) = -6$ 일 때,
 $f(2) + g(-1)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$f(x) = Ga, g(x) = Gb \quad (a, b \text{는 서로소})$$

$$G(a+b) = (2x-1)(x+3)$$

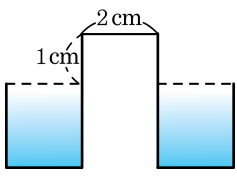
$$\text{최소공배수 } Gab = (x+3)(x-2)(x+1)$$

$$f(x) = (x+3)(x+1) \quad (\Leftarrow f(0) = 3)$$

$$g(x) = (x+3)(x-2) \quad (\Leftarrow g(0) = -6)$$

$$\therefore f(2) + g(-1) = 15 + (-6) = 9$$

16. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



- ① 125 cm^2 ② 288 cm^2 ③ 350 cm^2
 ④ 420 cm^2 ⑤ 120 cm^2

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a , 가로 길이를 b 라 하면
 총길이는 $a + b + a + 1 + 2 + a + 1 + b + a = 100$ 에서
 $4a + 2b = 96$
 $\therefore 2a + b = 48$ 이므로 $b = 48 - 2a$
 한 개 단면의 넓이는 ab 이므로
 $a(48 - 2a) = -2a^2 + 48a$
 $= -2(a^2 - 24a)$
 $= -2(a^2 + 24a + 144 - 144)$
 $= -2(a - 12)^2 + 288$
 따라서 $a = 12$ 일 때 최대 넓이 288 cm^2

17. 1 개에 700 원 하는 콜라와 1 개에 600 원 하는 사이다를 합해서 20 개를 사려고 한다. 콜라를 사이다 보다 많이 사고 전체 금액이 13,500 원 이하가 되도록 하려고 한다. 콜라를 최소 a 개 살 수 있고, 최대 b 개 살 수 있다고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 26$

해설

콜라의 개수를 x 개라고 놓으면 사이다의 개수는 $(20 - x)$ 개이다. 콜라를 사이다 보다 많이 사게 되면 $x > 20 - x$ 이다.

콜라와 사이다를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $700x + 600(20 - x)$ 이다. 또 전체 금액은 13,500 원 이하가 되어야 하기 때문에 $700x + 600(20 - x) \leq 13500$ 이다.

위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x > 20 - x \\ 700x + 600(20 - x) \leq 13500 \end{cases} \quad \text{이다.} \quad \text{이를 간단히 하면}$$

$$\begin{cases} x > 10 \\ x \leq 15 \end{cases} \quad \text{이다. 따라서 } 10 < x \leq 15 \text{ 이다. 그러므로 콜라}$$

는 최소로 11 개, 최대로 15 개 살 수 있다. 따라서 $a = 11$, $b = 15$ 이다.

따라서 $a + b = 11 + 15 = 26$ 이다.

18. 15% 의 소금물 200g 이 있을 때, 물 x g 을 증발시켜서 30% 이상 60% 이하의 소금물을 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $100 \leq x \leq 150$

해설

15% 의 소금물 200g 의 소금의 양은 $\frac{15}{100} \times 200 = 30(\text{g})$ 이다.

따라서 물 x g 을 뺀을 때의 농도를 나타내면 $\frac{30}{200-x} \times 100$ 이다.

이 값이 30% 이상 60% 이하 이므로, $30 \leq \frac{30}{200-x} \times 100 \leq 60$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 30 \leq \frac{30}{200-x} \times 100 \\ \frac{30}{200-x} \times 100 \leq 60 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \geq 100 \\ x \leq 150 \end{cases}$ 이다.

따라서 증발시켜야 하는 물의 양 x 의 범위는 $100 \leq x \leq 150$ 이다.

19. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B, A \neq B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $n(A) < n(B)$
- ② $B = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 8개이다.
- ③ $n(B) = 3$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.
- ④ $n(A) + 2 = n(B)$
- ⑤ $n(A) = n(B)$

해설

- ① A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) \geq n(A) + 1$ 이다. 따라서 $n(A) < n(B)$ 가 된다.
- ② $B = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 자기 자신을 제외해야 하므로 7개이다.
- ③ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) = 3$ 이면 $n(A) \leq 2$ 이다.
- ④, ⑤ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) > n(A)$ 이다.

20. 집합 $A = \{x \mid x = 10 \times a + 2, a = 1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대해서, 원소 52 또는 72 를 포함하는 부분집합의 개수는?

- ① 24 개 ② 26 개 ③ 28 개 ④ 32 개 ⑤ 36 개

해설

$A = \{12, 32, 52, 72, 92\}$
원소 52 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $2^{5-1} = 16$ (개)
원소 72 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $2^{5-1} = 16$ (개)
원소 52, 72 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $2^{5-2} = 8$ (개)
원소 52 또는 72 를 포함하는 부분집합의 개수 :
 $16 + 16 - 8 = 24$ (개)

21. 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라고 하자. $P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?
- ① $p \rightarrow q$ ② $r \rightarrow q$ ③ $q \rightarrow p$
 ④ $p \rightarrow r$ ⑤ $q \rightarrow r$

해설

$P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 벤다이어그램으로 나타내면

$Q \cup R = R \leftrightarrow Q \subset R \therefore q \rightarrow r$ 가 참이다.

22. $(1 - x - x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$ 에 대하여
 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{1}$
 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{2}$
 (ii) $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$
 $\therefore A = 1$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면
 $0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$
 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore B = 0$
 $\therefore A + 2B = 1$

23. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x}$ 의 값은?(단, x 는 실수)

① $-1 + \sqrt{6}$

② $-1 - \sqrt{6}$

③ $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$ 이므로

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면

$$(t^2 - 2) + 2t - 3 = 0, \quad t^2 + 2t - 5 = 0$$

$$\therefore t = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$(ii) \quad x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$$

그런데 $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$ 이므로

($\because$ x 는 실수)

$$\therefore x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{6}$$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x+3y=13 \\ x+y=3^z \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y, z 의 합을 구하면?

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$x+3y=13 \cdots \textcircled{A}$
 $x+y=3^z \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 에서 $2y=13-3^z$
 $\therefore y=\frac{13-3^z}{2} \cdots \textcircled{C}$
 $y>0$ 이므로 $z=1$ 또는 2
 $\textcircled{C}, \textcircled{A}$ 에 의해서
 $z=1$ 이면 $y=5, x=-2$
 $z=2$ 이면 $y=2, x=7$
 x, y, z 는 양의 정수이므로 $x=7, y=2, z=2$
 $\therefore x+y+z=11$

25. $\sqrt{x+2} = x+k$ 가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는? (단, k 는 상수)

- ① $2 < k < \frac{9}{4}$
 ② $2 \leq k < \frac{9}{4}$
 ③ $k > \frac{9}{4}$
- ④ $k < 2$
 ⑤ $2 < k \leq \frac{9}{4}$

해설

$y = \sqrt{x+2} \dots\dots\dots ①$
 $y = x+k \dots\dots\dots ②$ 라 하면
 그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1이고 k 값의 변화에 따라 달라진다.
 그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는 경우는
 $\sqrt{x+2} = x+k \rightarrow x+2 = (x+k)^2 \rightarrow x^2+2kx+k^2-x-2=0$
 $\rightarrow x^2+(2k-1)x+k^2-2=0 \dots\dots\dots ③$
 ①, ②가 서로 접하려면 ③의 $D=0$ 이어야 한다.
 $\therefore (2k-1)^2-4(k^2-2)=0, 4k^2-4k+1-4k^2+8=0$
 $-4k+9=0, 4k=9$
 $\therefore k=\frac{9}{4}$
 또 직선 ②가 $(-2, 0)$ 을 지날 경우
 $0=-2+k$
 $\therefore k=2$
 따라서 구하는 k 의 범위는 $2 \leq k < \frac{9}{4}$