1. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$　② $2\sqrt{17}$　③ $5\sqrt{13}$　④ $3\sqrt{17}$　⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

2. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}(\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c}=-\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하여라.(단, p, q는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq 0)$로 놓으면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c}=\frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k}=\frac{-k}{13k}=-\frac{1}{13}$

$\therefore p=13, q=1\quad p+q=14$

3. 곡선 $xy + x - 3y - 2 = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면 ③ 제 3 사분면

④ 제 4 사분면 ⑤ 없다.

해설

$xy + x - 3y - 2 = 0$ 을 y 에 대하여

정리하면 $(x-3)y = -x + 2$

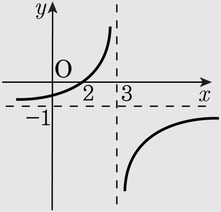
$\therefore \ y = \dfrac{-x+2}{x-3} = \dfrac{-1}{x-3} - 1 (x \neq 3)$

즉, $y = \dfrac{-1}{x-3} - 1$ 은 점근선이

$x = 3, \ y = -1$ 이고 점 $(2, \ 0)$ 을 지나므로

그래프는 다음 그림과 같다. 따라서,

제 2 사분면을 지나지 않는다.



4. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$(x-1)(3x^2 + ax + 2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2 + ax + 2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$
$\therefore a = -3$

5. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, t 초 후의 높이를 $h\mathrm{m}$ 라고 하면 $h=-\frac{1}{2}t^2+3t$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : $\frac{9}{2}$ m

해설

$h=-\frac{1}{2}t^2+3t$ 에서 $h=-\frac{1}{2}(t-3)^2+\frac{9}{2}$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{9}{2}\mathrm{m}$ 이다.

6. $A \subset B$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $A^C \subset B^C$　　② $A \cup B^c = U$　　③ $A - B = \varnothing$

④ $A \cup B = A$　　⑤ $A \cap B = B$

해설

③ 집합 A 가 B에 포함되면 $A - B = \varnothing$ 이 성립하게 된다.

7. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 빈칸에 알맞은 것은?

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup (\qquad\qquad)$

① $A \cap B$ ② $A \cap B^c$ ③ $(A \cap B)^c$

④ $A^c \cup B$ ⑤ $A \cup B^c$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cap B) \cup (\qquad\qquad)$ 에서

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이고,

$(A^c \cap B) \cup (\qquad\qquad) = (B - A) \cup (\qquad\qquad)$ 이므로,

빈칸에는 $A - B$ 에 해당하는 식인 $A \cap B^c$ 이 들어와야 한다.

8. 100 명의 학생 중 영어를 좋아하는 학생은 65 명, 수학를 좋아하는 학생은 52 명이다. 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 65 ② 52 ③ 48 ④ 35 ⑤ 17

해설

전체집합을 U, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 A, 수학을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \cdots$ ㉠
$n(A \cup B) \leq n(U) = 100 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $100 \geq 65 + 52 - n(A \cap B)$
$n(A \cap B) \geq 65 + 52 - 100 = 17$
$\therefore\ n(A \cap B) \geq 17$

(ii) $n(A \cap B) \leq n(A)$이고 $n(A \cap B) \leq n(B)$
따라서 $n(A \cap B) \leq 65$이고 $n(A \cap B) \leq 52$
$\therefore n(A \cap B) \leq 52$
(i), (ii)에서 $17 \leq n(A \cap B) \leq 52$
$\therefore\ M = 52,\ m = 17 \quad M - m = 35$

9. 0이 아닌 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}$를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$($m,\ n$은 서로소인 정수)이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}=k$ 라 하자

$\Rightarrow x+y=5k,\ \ y+z=6k,\ \ z+x=7k$

세 식을 모두 더하여 정리하면 $x+y+z=9k$

다시 식에 대입하면 $x=3k,\ y=2k,\ z=4k$

$$(\text{준식})=\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$$

$$=\frac{25k^2-16k^2}{9k^2-4k^2+16k^2}=\frac{3}{7}$$

$\therefore m=7,\ n=3$

$\therefore m+n=10$

10. 5 원짜리 동전 4 개, 10 원짜리 동전 2 개, 100 원짜리 동전 1 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인지 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 17 가지

해설

5 원짜리 동전 4 개이면 10 원짜리 동전 2 개와 같으므로 금액이 중복된다.
10 원짜리 동전 2 개를 5 원짜리 동전 4 개로 바꾸면 5 원짜리 동전 8 개, 100 원짜리 동전 1 개가 되고 지불 방법의 수는
$(8+1)\times(1+1)=18$ 가지
돈이 0 원이면 지불하는 것이 아니므로
$18-1=17$ 가지

11. 100 원, 300 원, 500 원짜리 3 종류의 사탕이 있다. 이 사탕을 1000 원어치 사는 방법의 수는?

① 7개 ② 10개 ③ 13개 ④ 15개 ⑤ 17개

해설

500 원을 기준으로 생각한다.

100 원을 A, 300 원을 B라 하면,

(1) 500 원 0개 :

$(A, B) = (1, 3),\ (4, 2),\ (7, 1),\ (10, 0)$

(2) 500 원 1개 : $(A, B) = (2, 1),\ (5, 0)$

(3) 500 원 2개 : $(A, B) = (0, 0)$

$\therefore$ 총 7개

12. 1 부터 999 까지의 자연수 중에서 각 자리에 7 인 숫자가 2 개 이상인 경우의 수는?

① 26 개 ② 27 개 ③ 28 개 ④ 29 개 ⑤ 30 개

해설

① 7 이 2 개 있는 수 : 77 이 1 개,
77□꼴이 9 개,
7□7 꼴이 9 개,
□77 꼴이 8 개
② 7 이 3 개 있는 수, 777 로 1 개
따라서 구하는 경우의 수는
$1 + 9 + 9 + 8 + 1 = 28$ (개)

13. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 만들 수 있는 세 자리의 정수는 몇 개인가?

① 60 ② 80 ③ 100 ④ 125 ⑤ 180

해설

백의 자리 : 0 을 제외한 5 개 숫자를 모두 사용가
십의 자리 : 백의 자리에 사용한 수를 제외한 5 개
일의 자리 : 백의 자리, 십의 자리에 사용한 수 2 개를 제외한 4 개
$\therefore 5 \times 5 \times 4 = 100$

14. 7 송이의 서로 다른 종류의 꽃을 3 송이, 2 송이, 2 송이의 세 묶음으로 나누는 방법의 수는?

① 105 ② 120 ③ 210 ④ 630 ⑤ 1260

해설

7 송이를 $3, 2, 2$ 송이로 나누는 방법의 수는,

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$$

$$= \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{4\cdot3}{2\cdot1} \times 1 \times \frac{1}{2\cdot1} = 105$$

15. x^2 의 계수가 1 인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2+5x-3$ 이고 최소공배수가 x^3+2x^2-5x-6 이다. $f(0)=3$, $g(0)=-6$ 일 때, $f(2)+g(-1)$ 의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+g(x)=2x^2+5x-3$

$f(x)=Ga, g(x)=Gb$ (a, b는 서로소)

$G(a+b)=(2x-1)(x+3)$

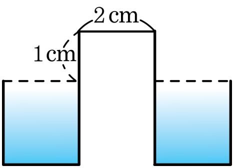
최소공배수 $Gab=(x+3)(x-2)(x+1)$

$f(x)=(x+3)(x+1)$ $(\Leftarrow f(0)=3)$

$g(x)=(x+3)(x-2)$ $(\Leftarrow g(0)=-6)$

$\therefore f(2)+g(-1)=15+(-6)=9$

16. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



① $125\,\mathrm{cm}^2$　② $288\,\mathrm{cm}^2$　③ $350\,\mathrm{cm}^2$

④ $420\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $120\,\mathrm{cm}^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a, 가로의 길이를 b 라 하면

총길이는 $a+b+a+1+2+a+1+b+a=100$ 에서

$4a+2b=96$

$\therefore 2a+b=48$ 이므로 $b=48-2a$

한 개 단면의 넓이는 ab 이므로

$$\begin{aligned} a(48-2a) &= -2a^2+48a \\ &= -2(a^2-24a) \\ &= -2(a^2+24a+144-144) \\ &= -2(a-12)^2+288 \end{aligned}$$

따라서 $a=12$ 일 때 최대 넓이 $288\,\mathrm{cm}^2$

17. 1 개에 700 원 하는 콜라와 1 개에 600 원 하는 사이다를 합해서 20 개를 사려고 한다. 콜라를 사이다 보다 많이 사고 전체 금액이 13,500 원 이하가 되도록 하려고 한다. 콜라를 최소 a 개 살 수 있고, 최대 b 개 살 수 있다고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=26$

해설

콜라의 개수를 x 개라고 놓으면 사이다의 개수는 $(20-x)$ 개이다.
콜라를 사이다 보다 많이 사게 되면 $x>20-x$ 이다.
콜라와 사이다를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $700x+600(20-x)$ 이다. 또 전체 금액은 13,500 원 이하가 되어야 하기 때문에 $700x+600(20-x)\le 13500$ 이다.
위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면 $\begin{cases} x>20-x \\ 700x+600(20-x)\le 13500 \end{cases}$ 이다. 이를 간단히 하면 $\begin{cases} x>10 \\ x\le 15 \end{cases}$ 이다. 따라서 $10<x\le 15$ 이다. 그러므로 콜라는 최소로 11 개, 최대로 15 개 살 수 있다. 따라서 $a=11$, $b=15$ 이다.
따라서 $a+b=11+15=26$ 이다.

18. 15% 의 소금물 200g 이 있을 때, 물 xg 을 증발시켜서 30% 이상 60% 이하의 소금물을 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $100 \le x \le 150$

해설

15% 의 소금물 200g 의 소금의 양은 $\frac{15}{100} \times 200 = 30(\text{g})$ 이다.

따라서 물 xg 을 뺏을 때의 농도를 나타내면 $\frac{30}{200-x} \times 100$ 이다.

이 값이 30% 이상 60% 이하 이므로, $30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \\ \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \ge 100 \\ x \le 150 \end{cases}$ 이다.

따라서 증발시켜야 하는 물의 양 x 의 범위는 $100 \le x \le 150$ 이다.

19. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $n(A) < n(B)$

② $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 8개이다.

③ $n(B) = 3$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.

④ $n(A) + 2 = n(B)$

⑤ $n(A) = n(B)$

해설

① A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) \geq n(A) + 1$ 이다. 따라서 $n(A) < n(B)$가 된다.

② $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때, 집합 A 의 개수는 자기 자신을 제외해야 하므로 7개이다.

③ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) = 3$ 이면 $n(A) \leq 2$ 이다.

④, ⑤ A 는 B 의 진부분집합이므로 $n(B) > n(A)$ 이다.

20. 집합 $A = \{x \mid x = 10 \times a + 2,\ a = 1,\ 3,\ 5, 7,\ 9\}$ 에 대해서, 원소 52 또는 72 를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 24 개　② 26 개　③ 28 개　④ 32 개　⑤ 36 개

해설

$A = \{12,\ 32,\ 52,\ 72,\ 92\}$

원소 52 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{5-1} = 16$ (개)

원소 72 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{5-1} = 16$ (개)

원소 52, 72 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$2^{5-2} = 8$ (개)

원소 52 또는 72 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$16 + 16 - 8 = 24$ (개)

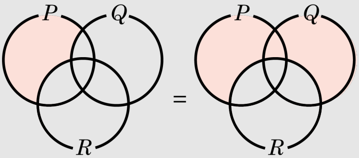
21. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p\rightarrow q$　　② $r\rightarrow q$　　③ $q\rightarrow p$

④ $p\rightarrow r$　　⑤ $q\rightarrow r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R\leftrightarrow Q\subset R$ $\therefore$ $q\rightarrow r$가 참이다.

22. $(1-x-x^2)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100}$ 라 할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=A$, $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=B$ 에 대하여 $A+2B$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 100　　⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}+a_{100}\cdots$ ㉠

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{99}+a_{100}\cdots$ ㉡

(ii) ㉠+㉡ 하면 $2=2(a_0+a_2+\cdots+a_{100})$

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots+a_{100}=1$

$\therefore\ A=1$

㉠ − ㉡하면

$0=2(a_1+a_3+\cdots+a_{99})$

$a_1+a_3+\cdots+a_{99}=0 \quad \therefore\ B=0$

$\therefore\ A+2B=1$

23. $x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0$일 때, $x+\frac{1}{x}$의 값은?(단, x는 실수)

① $-1+\sqrt{6}$　　② $-1-\sqrt{6}$　　③ $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$　　⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$이므로

$x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+2x-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}^2=0$$

$$\therefore \left(x^2+\frac{1}{x}^2\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$(t^2-2)+2t-3=0,\ t^2+2t-5=0$

$\therefore\ t=-1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1\pm\sqrt{6}$

그런데 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$이므로

($\because$ x는 실수)

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{6}$$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x+3y=13 \\ x+y=3^z \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y, z 의 합을 구하면?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$x+3y=13 \cdots$ ㉠

$x+y=3^z \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $2y=13-3^z$

$\therefore\ y=\dfrac{13-3^z}{2} \cdots$ ㉢

$y>0$ 이므로 $z=1$ 또는 2

㉢, ㉠에 의해서

$z=1$ 이면 $y=5,\ x=-2$

$z=2$ 이면 $y=2,\ x=7$

$x,\ y,\ z$ 는 양의 정수이므로 $x=7,\ y=2,\ z=2$

$\therefore\ x+y+z=11$

25. $\sqrt{x+2} = x+k$가 서로 다른 두 개의 근을 가질 때 실수 k 의 값의 범위는 ? (단, k 는 상수)

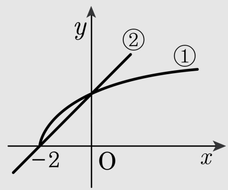
① $2 < k < \frac{9}{4}$　② $2 \le k < \frac{9}{4}$　③ $k > \frac{9}{4}$

④ $k < 2$　⑤ $2 < k \le \frac{9}{4}$

해설

$y = \sqrt{x+2} \cdots\cdots\cdots$ ①

$y = x + k \cdots\cdots\cdots$ ② 라 하면



그림에서 ②의 그래프는 기울기가 1 이고 k 값의 변화에 따라 달라진다.

그런데 곡선 ①과 직선 ②가 서로 접하는 경우는

$\sqrt{x+2} = x+k \rightarrow x+2 = (x+k)^2 \rightarrow x^2+2kx+k^2-x-2=0$

$\rightarrow x^2 + (2k-1)x + k^2 - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots$ ③

①, ②가 서로 접하려면 ③의 $D = 0$ 이어야 한다.

$\therefore (2k-1)^2 - 4(k^2-2) = 0,\ 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8 = 0$

$-4k + 9 = 0,\ 4k = 9$

$\therefore k = \frac{9}{4}$

또 직선 ②가 $(-2,\ 0)$ 을 지날 경우

$0 = -2 + k$

$\therefore k = 2$

따라서 구하는 k 의 범위는 $2 \le k < \frac{9}{4}$