

1. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

2. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때 $\frac{x^{10} + 1}{x^2}$ 의 값을 구하여라?

① 1

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -1

해설

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^{10} + 1}{x^2}$$

$$= \frac{(x^3)^3 x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{x + 1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2}$$

$$= -1$$

$$(\because x^2 + x + 1 = 0)$$

3. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180

② -180

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에

$(x + 1)$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

4. 허수 w 가 $\omega^3 = 1$ 을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}\omega^3 = 1 &\Rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 \\ = \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 \\ = (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1\end{aligned}$$

5. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$$

6. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일때

$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서

$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이 성립한다.

주어진 문제식을 ω^{50} 으로 묶으면

$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$ 이고

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로 답은 0이다.

7. 방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega(2\omega - 1)(\omega^2 + 2)$ 의 값은 ?

① $-\omega$

② ω

③ -3

④ 3

⑤ 5

해설

$$x^3 + 1 = 0, (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$\therefore \omega(2\omega - 1)(\omega^2 + 2)$$

$$= (2\omega - 1)(\omega^3 + 2\omega)$$

$$= (2\omega - 1)(-1 + 2\omega)$$

$$= 4\omega^2 - 4\omega + 1$$

$$= 4(\omega - 1) - 4\omega + 1$$

$$= 4\omega - 4 - 4\omega + 1$$

$$= -3$$

8. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때, $x^{100} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{100}}$ 의 값은?

① 1

② -2

③ 0

④ -1

⑤ 2

해설

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore x^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = x \cdot x^{99} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x \cdot x^{99}}$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= -1 + \frac{x+1}{x^2} (\because x^2 + x = -1)$$

$$= -1 + \frac{-x^2}{x^2} (\because x + 1 = -x^2)$$

$$= -2$$

9. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6 = aw + b$ 를 만족하는 실수 a, b 를 구하면?

- ① $a = -1, b = 2$ ② $a = 2, b = -3$ ③ $a = -3, b = 1$
④ $a = -1, b = 1$ ⑤ $a = 1, b = 2$

해설

$$x^3 - 1 = 0 \text{에서 } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이 w 이다.

$$\therefore w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0$$

$$\Rightarrow w^2 = -w - 1$$

$$\therefore 1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6$$

$$= 1 + 2w + 3w^2 + 4$$

$$= 1 + 2w + 3(-w - 1) + 4$$

$$= -w + 2$$

$$\therefore -w + 2 = aw + b$$

a, b 는 실수이고, w 는 허수이므로

$$a = -1, b = 2$$

10. $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $\omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$ 의 값은?

① 3

② -1

③ 1

④ 0

⑤ 2

해설

문제의 조건에서 ω 는

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 를 만족시키므로

윗식의 양변에 $\omega - 1$ 을 곱하면

$$\omega^3 - 1 = 0$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega^{2012} + \omega^{2013} + \omega^{2014}$$

$$= (\omega^3)^{670} \cdot \omega^2 + (\omega^2)^{671} + (\omega^3)^{671} \cdot \omega$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

11. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 틀린 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

② $\omega^3 = 1$

③ 1의 세제곱근은 1, ω , ω^2 으로 나타낼 수 있다.

④ $\omega^2 = \bar{\omega}$ (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

⑤ $\omega = -\omega^2$

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1 \cdots \text{①, ②}$$

$$x = 1, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면 } \cdots \text{③}$$

$$\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \bar{\omega} \cdots \text{④}$$

$$\omega = -1 - \omega^2 \cdots \text{⑤(거짓)}$$

12. $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{\omega^2}{\omega^{10} + 1} + \frac{\omega^{10} + 1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},$$

$$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 ω 이다.

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{-(1 + \omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1 + \omega)} \\ &= \frac{-(\omega + 1)}{(\omega + 1)} + \frac{(\omega + 1)}{-(\omega + 1)} = -2 \end{aligned}$$

13. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^3 = 1$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \bar{\omega}$

④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1$ (○)

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

③ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$\omega + \bar{\omega} = -1$

$\bar{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$

$\therefore \bar{\omega} = \omega^2$ (○)

④ $\omega^2 + \omega = -1$ (○)

⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1$ (×)

14. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

② $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

③ $(1 + \omega^2)^2 = \omega$

④ $(1 + \omega)^{10} = \omega^2$

⑤ $\omega^3 = 1$

해설

$$x^3 = 1$$

$$(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

ω 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이다.

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①식을 ω 로 나누면

$$\omega + \frac{1}{\omega} = -1 (\textcircled{\times})$$

$$\textcircled{3} \quad (1 + \omega^2)^2 = (-\omega)^2 = \omega^2 (\textcircled{\times})$$

$$\textcircled{4} \quad (1 + \omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$$

$$= \omega^{20}$$

$$= (\omega^3)^6 \omega^2$$

$$= \omega^2 \quad (\textcircled{\circ})$$

15. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 ω , $\bar{\omega}$ 라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega + \bar{\omega} = -1$

② $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\bar{\omega})^2 = 1$

④ $\omega^2 = \bar{\omega}$, $(\bar{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$$x^3 = 1, (x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

$$x^2+x+1=0 \quad \omega^3=1,$$

$$\omega^2+\omega+1=0,$$

$$\bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$$

① $x^2+x+1=0$ 두근은 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega + \bar{\omega} = -1(\bigcirc)$$

② $x^2+x+1=0$ 두근은 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega \cdot \bar{\omega} = 1(\bigcirc)$$

③ $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega \cdot \bar{\omega}$
 $= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1(\times)$

④ $\omega + \bar{\omega} = -1,$
 $\bar{\omega} = -1 - \omega$

$$= -(1 + \omega) = \omega^2$$

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega = -1 - \bar{\omega} = -(1 + \bar{\omega})$$

$$= \bar{\omega}^2(\bigcirc)$$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0 (\bigcirc)$

16. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, $\frac{w^{102} + w^{101}}{w^{100}} + \frac{w^{99}}{w^{101} + w^{100}}$ 을 계산하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^2 + \omega = -1$$

$$\frac{\omega^{102} + \omega^{101}}{\omega^{100}} + \frac{\omega^{99}}{\omega^{101} + \omega^{100}}$$

$$= \frac{\omega^2 + \omega}{1} + \frac{1}{\omega^2 + \omega}$$

$$= -1 - 1 = -2$$

17. α, β 를 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^{10} + (\beta^2 + 1)^{10}$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^3 - 1 = 0, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{의}$$

두 허근이 α, β 라면,

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 허근이 α, β 이다.

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} + 1 = -\alpha$$

$$\beta^2 + \beta + 1 = 0,$$

$$\beta^2 + 1 = -\beta$$

$$\alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^{10} + (\beta^2 + 1)^{10}$$

$$= (-\alpha)^{10} + (-\beta)^{10}$$

$$= \alpha^{10} + \beta^{10}$$

$$= (\alpha^3)^3 \alpha + (\beta^3)^3 \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

18. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1}$ 의 값을 구하면?
(단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① 2

② 3

③ 5

④ -3

⑤ -5

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근은

$$\omega, \bar{\omega} \Rightarrow \omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0, \omega^3 - 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0,$$

$$(\bar{\omega} - 1)(\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1) = 0,$$

$$\bar{\omega}^3 - 1 = 0, \bar{\omega}^3 = 1$$

$$\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1} = \frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega + 1}$$

$$= \frac{2\omega^2}{-\omega^2} + \frac{3\bar{\omega}}{-\omega^2}$$

$$= -2 + \frac{3\omega\bar{\omega}}{-\omega^3}$$

$$= -2 - \frac{3}{1} = -5$$

19. $x^3 = 1$ 의 한 허근이 ω 일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$w^3 = 1,$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \text{의 한 허근이 } \omega$$

$$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$$

$$= w^2 + w + 1$$

$$= 0$$

20. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $w^3 - 1 = 0$

② $w^2 - w + 1 = 0$

③ $w + \frac{1}{w} = -1$

④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$

⑤ 다른 허근은 w^2 이다.

해설

① $w^3 = 1$ 이므로 $w^3 - 1 = 0$

② $w^3 - 1 = 0$ 이므로

$$(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$$

$w - 1 \neq 0$ 이므로 $w^2 + w + 1 = 0$

$$\therefore w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$$

③ $w^2 + w + 1 = 0$ 이고

$w \neq 0$ 이므로

양변을 w 로 나누면 $w + 1 + \frac{1}{w} = 0$

$$\therefore w + \frac{1}{w} = -1$$

④ $w^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega,$

$$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\therefore w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$$

$$(\because w^2 + w + 1 = 0)$$

⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$

따라서, w^2 은 $x^3 = 1$ 의 다른 한 허근이다.

21. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^6 + \omega^2 + \omega + 1$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$(\omega^3)^2 + (\omega^2 + \omega + 1) = 1^2 + 0 = 1$$

22. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

㉠ $\omega^6 = 1$

㉡ $\omega^2 = \bar{\omega}$

㉢ $\omega + \bar{\omega} = -1$

㉣ $\omega^2 + \omega = -1$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로,

$$\omega^3 = 1, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 켈레근 $\bar{\omega}$ 일 경우도

$$\bar{\omega}^3 = 1, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$$

㉠ $\omega^3 = 1, (\omega^3)^2 = 1 \rightarrow (\bigcirc)$

㉢ $\omega + \bar{\omega} = -1,$

$$\bar{\omega} = -1 - \omega = -(\omega + 1)$$

$\omega^2 + \omega + 1$ 을 이용.

$$\omega + 1 = -\omega^2 \text{이므로 } \bar{\omega} = \omega^2 \rightarrow (\bigcirc)$$

㉡ 두 근 $\omega, \bar{\omega}$ 의 합은

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근의 합이므로

$$\omega + \bar{\omega} = -1$$

㉣ $\omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$$\omega^2 + \omega = -1 \rightarrow (\bigcirc)$$

23. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $-\frac{w+1}{w^2} + \frac{1+w^2}{w}$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ -1

④ 2

⑤ -2

해설

$$x^3 = 1,$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

w 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이 된다.

$$\text{즉, } \omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$-\frac{\omega + 1}{\omega^2} + \frac{1 + \omega^2}{\omega}$$

$$= \frac{\omega^2}{\omega^2} + -\frac{\omega}{\omega}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

24. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ ω

⑤ $-\omega$

해설

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\Rightarrow (\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$$

$$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + \omega = -1$$

25. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

26. 방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $1 - 2w + 3w^2 - 4w^3 + 3w^4 - 2w^5$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ -4

해설

방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일 때

$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로

$$1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 \cdot 1 + 3\omega^3 \cdot \omega - 2\omega^3 \cdot \omega^2$$

$$= 1 - 2\omega + 3\omega^2 - 4 + 3\omega - 2\omega^2$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 - 4 = -4$$

$$\therefore -4$$

27. 삼차방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때, 옳은 내용을 모두 고르면?(단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

② $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha} = -1$

③ $\alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2$

④ $\frac{\alpha + 1}{\alpha^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 + 1} = 2$

⑤ $\alpha^2\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}^2 = 1$

해설

$$x^3 = -1, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\alpha^3 = \bar{\alpha}^3 = -1,$$

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} + 1 = 0$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1,$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1$$

$$\textcircled{1} \alpha^2 + \alpha + 1 = 0(\bigcirc)$$

$$\textcircled{2} \alpha + \bar{\alpha} = 1(\times)$$

$$\textcircled{3} \alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = -1 - 1 = -2$$

$$\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 = (\alpha + \bar{\alpha})^2 - 2 = -1(\times)$$

$$\textcircled{4} \frac{\alpha + 1}{\alpha^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 + 1}$$

$$= \frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

$$= \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} + 1 = \frac{2}{1 - \alpha}(\times)$$

$$\textcircled{5} \alpha^2\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}^2$$

$$= \alpha\bar{\alpha}(\alpha + \bar{\alpha}) = 1(\bigcirc)$$

28. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르시오.

보 기

㉠ $(1 + \omega^2)^3 = -1$

㉡ $(1 + \omega)^{10} = \omega^2$

㉢ 모든 자연수 n 에 대하여 $(1 + \omega)^{3n} = (-1)^n$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\text{㉠ } \omega^2 + 1 = -\omega,$$

$$(\omega^2 + 1)^3 = (-\omega)^3 = -\omega^3 = -1(\bigcirc)$$

$$\text{㉡ } (1 + \omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$$

$$= \omega^{20} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 = \omega^2(\bigcirc)$$

$$\text{㉢ } (-\omega^2)^{3n} = (-1)^{3n} \cdot (\omega^3)^{2n}$$

$$= (-1)^n \cdot 1^{2n} = (-1)^n$$

$$(\because (-1)^{3n} = \{(-1)^3\}^n = (-1)^n) (\bigcirc)$$

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참