

1. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$ 의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 $n, n + 1$ 이라 하면

$$\begin{cases} n + (n + 1) = a \cdots \cdots \textcircled{A} \\ n(n + 1) = a + 1 \cdots \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } n = \frac{a - 1}{2} \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$\frac{a - 1}{2} \left(\frac{a - 1}{2} + 1 \right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a + 1)(a - 5) = 0$

$$a = -1, 5$$

$$\therefore -1 + 5 = 4$$

2. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면
 $X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$
 $\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$
(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서
 $x^2 + x - 2 = 0,$
 $(x - 1)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -2$
(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서
 $x^2 + x - 6 = 0,$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는
 $x = -3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서, 해가 아닌 것은 ③

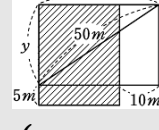
3. 대각선의 길이가 50m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5m 늘리고, 가로를 10m 줄이면 넓이가 50m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답: m

▶ 정답: 48m

애니메이션

저음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 다 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots \textcircled{7} \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots \textcircled{8} \end{cases}$$

①을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$$\therefore x = 2y + 20 \quad \cdots \textcircled{C}$$

㉔을 ㉕에 대입하면

$$(2y + 20)^2 + y^2 = 5$$

$$y^2 + 16y - 420 = 0$$

$$(v - 14)(v + 30) =$$

$$\therefore y = 14 - 30$$

그러면 $0 \leq x \leq$

이런데 $0 < y < 30$ 이므로 $y = 14$
이므로 $\odot$ 에 대입하면 $\quad 40$

이것을 ㉔에 대입하면 $x = 48$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{cases} x+y=k & \cdots \textcircled{A} \\ x^2+2y^2=4 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $y = -x + k$ 를 ②에 대입하면

$$x^2 + 2(-x + k)^2 = 4$$

$$3x^2 - 4kx + 2k^2 - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{C}$$

이차방정식 ③이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 3(2k^2 - 4) = 0$$

$$4k^2 - 6k^2 + 12 = 0, \quad k^2 = 6$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{6}$$

$$\therefore k_1k_2 = \sqrt{6} \times (-\sqrt{6}) = -6$$

5. 부등식 $(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

- ① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$(|x| - 1)(|x| - 3) < 0$
 $1 < |x| < 3$ 에서 구간을 나누면
(i) $x \geq 0$ 일 때, $1 < x < 3$, 정수 : 2
(ii) $x < 0$ 일 때, $1 < -x < 3$,
 $-3 < x < -1$ 정수 : -2
 $\therefore$ 정수의 개수 : 2개

6. $ax^2 + bx + 10 > 0$ 의 해가 $-2 < x < 5$ 가 되도록 하는 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$-2 < x < 5 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) < 0$$

$$x^2 - 3x - 10 < 0 \cdots \textcircled{1}$$

한편 $ax^2 + bx + 10 > 0$ 의 양변에 -1 을 곱하면,

$$-ax^2 - bx - 10 < 0 \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②의 계수를 비교하면 $a = -1, b = 3$

$$\therefore a + b = -1 + 3 = 2$$

7. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ㉠ $\frac{1}{2}$ ㉡ 2 ㉢ $\frac{1}{3}$ ㉣ 3 ㉤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을

α, β 라 하면, $\alpha + \beta = 3$

한편, $f(2x + 1) = 0$ 에서

$2x + 1 = \alpha, 2x + 1 = \beta$ 이므로

$$x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$$

따라서, $\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2}$

$$= \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면, $\alpha + \beta = 3$

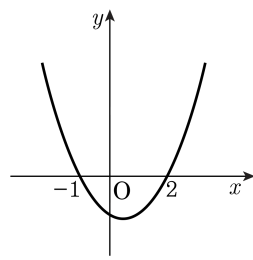
$f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ 라 하면

$f(2x + 1) = k(2x + 1 - \alpha)(2x + 1 - \beta)$

$\therefore f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가
다음 그림과 같을 때,
 x 에 대한 이차부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의
해는?



- ① $-1 < x < \frac{1}{2}$
 ② $x < -1$ 또는 $x > \frac{1}{2}$
 ③ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 1$
 ④ x 는 모든 실수
 ⑤ 해가 없다.

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 아래로 볼록이고
 x 축과의 교점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로

$a > 0$ 이고

$$ax^2 + bx + c = a(x+1)(x-2) = ax^2 - ax - 2a$$

$$\therefore b = -a, c = -2a \ (a > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{이때, } cx^2 + bx + a > 0 &\Leftrightarrow -2ax^2 - ax + a > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(2x-1) < 0 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 부등식의 해는 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 이다.

9. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포

물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

- ① $m < -2, \ m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, \ m > \frac{2}{3}$
- ③ $m < -2, \ m > 2$

④ $m < 2, \ m > \frac{2}{3}$
- ⑤ $m < -5, \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.
 $x^2 + (m - 2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식
 $D = (m - 2)^2 - 4m^2 < 0,$
 $(m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$
 $(3m - 2)(m + 2) > 0$
 $\therefore \ m < -2, \ m > \frac{2}{3}$

10. $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$

$1 \leq x \leq 2$ 에서

이 부등식이 항상 성립해야 하므로

방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이 1보다 작고, 다른 한 근은 2보다 커야 한다.

$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면

$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots \text{㉠}$

$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots \text{㉡}$

㉠, ㉡에서 $a < 1$

11. 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{1}{i} = -i, \left(\frac{1}{i}\right)^3 = i$$

i) $n = 2k$ 일 때,

$$1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$

$$= 1 - i + i - i + \cdots + i = 1$$

ii) $n = 2k - 1$ 일 때

$$1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$

$$= 1 - i + i - i + \cdots - i$$

$$= 1 - i$$

12. $x = \frac{1+3i}{1+i}$ 일 때, $x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ 의 값은?

① $1+i$

② $1-i$

③ $-1+i$

④ $-1-i$

⑤ 1

해설

$$x = 2 + i$$

$$(x-2)^2 = i^2 = -1$$

$$\therefore x^2 - 4x = -5$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) \quad &= x(x^2 - 4x) + 4x + 1 \\&= -5x + 4x + 1 \\&= -x + 1 \\&= -1 - i\end{aligned}$$

13. 방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때 $a^3 + b^3 - 3ab$ 의 값을 구하면 ? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - \{1 + (a + b)^2\} \cdot 2 \geq 0$$

$$-(a + b)^2 - 2(a + b) - 1 \geq 0$$

양변에 -1 을 곱하면

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

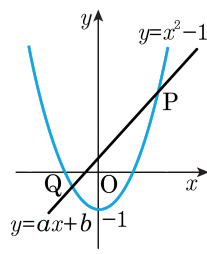
$$\{ (a + b) + 1 \}^2 \leq 0$$

그런데 a, b 가 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 - 3ab &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab \\ &= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab \\ &= -1 \end{aligned}$$

14. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$$(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = a(1 + \sqrt{2}) + b$$

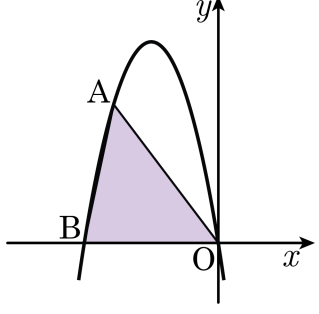
$$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = a + b, \quad 2 = a$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 0$$

15. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



- ① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.
 따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점 $(0, 0), (-6, 0)$ 을 지나므로,
 $0 = c, 0 = -36 - 6b$
 $b = -6, c = 0$
 $y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$
 $\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의 넓이가 최대가 된다.
 즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로
 $\triangle OAB$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$

16. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면
 $1 = 0$ 이 되어 모순이므로 $x \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
 x^2 으로 나누면
$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$
$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$
여기서 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면
 $X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$ $\therefore X = -7$ 또는 $X = 2$
(i) $X = -7$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = -7$ 에서
 $x^2 + 7x + 1 = 0$ $\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
(ii) $X = 2$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서
 $x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$ $\therefore x = 1$
(i), (ii)로부터
 $x = 1$ (중근) 또는 $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
따라서, 모든 근의 합은
 $1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6$ 이다.

17. $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20} + \omega^{10} + 1$
(2) $\omega^{101} + \overline{\omega}^{101} - \omega^{11} \cdot \overline{\omega} - \omega \cdot \overline{\omega}^{11}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω 가 $x^2 - x + 1$ 의 근이므로
 $\overline{\omega}$ 도 $x^2 - x + 1$ 의 근이다.
즉, $\omega^3 = -1, \overline{\omega}^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$
(1) $\omega^{20} + \omega^{10} + 1$
 $= (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \cdot \omega + 1$
 $= (-1)^6 \cdot \omega^2 + (-1)^3 \cdot \omega + 1$
 $= \omega^2 - \omega + 1 = 0$

(2) $\omega^{101} + \overline{\omega}^{101} - \omega^{11}\overline{\omega} - \omega\overline{\omega}^{11}$
 $= (\omega^3)^{33} \cdot \omega^2 + (\overline{\omega}^3)^{33} \cdot \overline{\omega}^2 -$
 $\omega\overline{\omega} \{ (\omega^3)^3 \cdot \omega + (\overline{\omega}^3)^3 \cdot \overline{\omega} \}$
 $= (-1)\omega^2 + (-1)\overline{\omega}^2 - \{ (-1)\omega + (-1)\overline{\omega} \}$
 $= -(\omega^2 - \omega) - (\overline{\omega}^2 - \overline{\omega})$
 $= -(-1) - (-1) = 2$

18. $A : 5(x+1) > 2x-1$, $B : \frac{x-4}{3} + \frac{3x+1}{2} > 1$ 에 대하여 A 에서 B 를 제외한 수들의 갯수는? (단, x 는 정수)

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A : x > -2$, $B : x > 1$ 이므로
 A 에서 B 를 제외한 수는 $-1, 0, 1$
따라서 3개이다.

19. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \\ 3x - 1 \geq 5x - 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 가 3개일 때, 상수

a 의 값의 범위는?

- ① $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$ ③ $0 \leq a < 1$
 ④ $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$

해설

$$\frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \text{ 에서 } x \geq a - \frac{1}{2}$$

$$3x - 1 \geq 5x - 7 \text{ 에서 } x \leq 3$$

$$\therefore a - \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

연립부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이려면

$$0 < a - \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$$

20. $3x-8 < -(2x+1)$, $\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$ 을 만족하는 x 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$3x - 8 < -(2x + 1)$$

$$\therefore x < 1.4$$

$$\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$$

$$\therefore 5 \leq x$$

$$0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2, \text{ } x \text{는 정수}$$

$$\therefore -0.4 \leq x$$

따라서 모두 만족하는 x 는 없으므로 0개이다.

21. 1개에 1,000 원 하는 볼펜과 1 개에 2,000 원 하는 노트를 합쳐서 30 개를 사려고 한다. 노트를 볼펜보다 많이 사고 전체 금액이 54,000 원 이하가 되도록 하려고 한다. 노트를 최소 a 개, 최대 b 개 살 수 있다면, $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \times b = 384$

해설

노트의 개수를 x 라고 놓으면 볼펜의 개수는 $30 - x$ 이다. 노트를 볼펜보다 많이 사게 되면 $x > 30 - x$ 이다.

볼펜과 노트를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $2000x + 1000(30 - x)$ 이다. 또 전체 금액은 54,000 원 이하가 되어야 하기 때문에 $2000x + 1000(30 - x) \leq 54000$ 이다.

위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x > 30 - x \\ 2000x + 1000(30 - x) \leq 54000 \end{cases} \quad \text{이다.}$$

$$\text{이를 간단히 하면 } \begin{cases} x > 15 \\ x \leq 24 \end{cases} \quad \text{이다.}$$

따라서 $15 < x \leq 24$ 이다.

그러므로 노트는 최소로 16 개, 최대로 24 개 살 수 있다.

따라서 $a = 16$, $b = 24$ 이다.

$$\therefore 16 \times 24 = 384$$

22. 연립방정식
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = k \\ x + y + 2z = 2k^2 \end{cases}$$
의 해 x, y, z 가 모두 양수일 때, k 의

값의 범위는?

- ① $-\frac{3}{2} < k < 0$ ② $1 < k < \frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4}$
 ④ $-2 < k < -\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < k < 1$

해설

i)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \cdots \textcircled{1} \\ x + 2y + z = k \cdots \textcircled{2} \\ x + y + 2z = 2k^2 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$
라 하면

$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} - \textcircled{3}$ 에서

$$4x = -2k^2 - k + 3 \\ = -(2k + 3)(k - 1) > 0 \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2} \times 3 - \textcircled{3} - \textcircled{1}$ 에서

$$4y = -2k^2 + 3k - 1 \\ = -(2k - 1)(k - 1) > 0 \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{3} \times 3 - \textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서

$$4z = 6k^2 - k - 1 \\ = (3k + 1)(2k - 1) > 0 \cdots \textcircled{6}$$

ii) $\textcircled{4}$ 에서 $-\frac{3}{2} < k < 1$

$\textcircled{5}$ 에서 $\frac{1}{2} < k < 1$

$\textcircled{6}$ 에서 $k < -\frac{1}{3}, k > \frac{1}{2}$

이들의 공통부분은 $\frac{1}{2} < k < 1$

23. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1 과 2 사이에 있도록 k 값의 범위를 구하면?

- ① $k < 0, k > 1$ ② $k \leq 0, k \geq 2$ ③ $0 < k < 1$
④ $0 \leq k \leq 1$ ⑤ $0 < k < 2$

해설

$x^2 - 2x + k = f(x)$ 라 하면
 $f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$
 $\therefore k > 0, k < 1$
 $\therefore 0 < k < 1$

24. 복소수 α, β 는 $\alpha\bar{\alpha} = 1$, $\beta\bar{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ $1+i$ ④ $1-i$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$\alpha + \beta = i \text{ 에서 } \overline{\alpha + \beta} = \bar{i} \therefore \bar{\alpha} + \bar{\beta} = -i \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1 \text{ 에서}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -i, \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -i, \frac{i}{\alpha\beta} = -i$$

$$\therefore \alpha\beta = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot (\alpha\beta) \\ &= i^2 - 2 \cdot (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

25. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + nx + p = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $x^2 + nx + q = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 를 p, q 로 나타내면?

- ① $(p + q)^2$
- ② $(2p + q)^2$
- ③ $(p - 2q)^2$
- ④ $(p - q)^2$
- ⑤ $(2p - 3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \beta = -n, \alpha\beta = p, \gamma + \delta = -n, \gamma\delta = q$ 이므로
주어진 식 $= \{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)\} \{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)\}$
 $= \{\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$
 $= (\gamma^2 + n\gamma + p)(\delta^2 + n\delta + p)$
그런데, $\gamma^2 + n\gamma + q = 0$ 에서
 $\gamma^2 + n\gamma + p = p - q$
또, $\delta^2 + n\delta + q = 0$ 에서
 $\delta^2 + n\delta + p = p - q$
따라서, 주어진 식 $= (p - q)^2$

26. 다음 세 조건을 만족하는 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 은 몇 개 존재하는가?

- (가) a, b, c, d 는 100이하의 서로 다른 자연수이다.
(나) c, d 는 양의 약수를 3개만 갖는 자연수이다.
(다) c, d 는 방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이다.

- ① 1가지

② 2가지

③ 3가지
- ④ 4가지

⑤ 5가지

해설

양의 약수가 홀수 개인 자연수는 완전제곱수이다.
1이 아닌 어떤 수 a^2 에 대하여
약수는 일단 1, a^2 , a 의 세 개가 있는데
더 이상의 약수가 존재하지 않으면 a 는 소수이다.
즉 c, d 는 소수의 제곱수로 100이하이므로
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 네 가지 중에 있다.
조건 (다)에서 $a = c + d, b = cd$ 이고
 a, b 는 100이하의 자연수이므로

$$\begin{cases} a = 2^2 + 3^2 \\ b = 2^2 \cdot 3^2 \end{cases}, \begin{cases} a = 2^2 + 5^2 \\ b = 2^2 \cdot 5^2 \end{cases} \text{의 두 가지}$$

27. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $a > 0$, $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 두 근은 모두 음이다.
 - ② 음근을 가질 수 없다.
 - ③ 적어도 한 개의 음근을 갖는다.
 - ④ 두 근은 모두 양이다.
 - ⑤ 양근 한 개, 음근 한 개를 갖는다.

해설

$b^2 - 4ac > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} < 0, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

- (i) $c > 0$ 이면 $\alpha\beta > 0$ 이므로 두 근은 모두 음
- (ii) $c < 0$ 이면 $\alpha\beta < 0$ 이므로 두 근은 양, 음
- (iii) $c = 0$ 이면 $\alpha\beta = 0$ 이므로 두 근은 음, 0

28. 좌표평면 위의 두 점 A(0, 2), B(-4, 3) 와 직선 $y = 1$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

점 P 의 좌표를 $(a, 1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (a^2 + 1) + \{(a + 4)^2 + 4\} \\ &= 2a^2 + 8a + 21 \\ &= 2(a + 2)^2 + 13\end{aligned}$$

따라서 $a = -2$ 일 때, 최솟값은 13 이다.

29. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1

② 3

③ 5

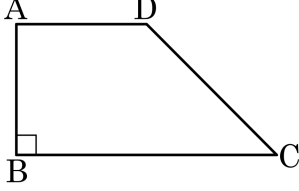
④ 7

⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x + 1)^2 - 1$ 이므로
 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-1 \leq t \leq 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t - 2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
 $t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

30. 다음 그림의 사다리꼴 ABCD 에서 $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\overline{AB} + \overline{BC} = 18$ 일 때, 이 사다리꼴의 최대 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

꼭짓점 D 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 변 AB 의 길이를 x 라 하면 $\triangle DHC$ 는 이등변삼각형이고 변 BC 의 길이는 $18 - x$ 이다.

$$\overline{AB} = \overline{DH} = \overline{HC} = x$$

$$\overline{AD} = \overline{BH} = 18 - x - x = 18 - 2x$$

사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \{ (18 - 2x) + (18 - x) \} \times x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 18x \\ &= -\frac{3}{2}(x - 6)^2 + 54 \end{aligned}$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 사다리꼴 넓이의 최댓값은 54 이다.

31. x 에 관한 삼차방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, $(1 - \alpha^3)(1 - \beta^3)(1 - \gamma^3)$ 의 값은?

- ① 4 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 에서 근과 계수와의 관계에 의해
 $\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \alpha\beta\gamma = -1$
또한 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변에 $x - 1$ 를 곱하면
 $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = 0, \quad x^4 = 1$
 $\therefore \alpha^4 = \beta^4 = \gamma^4 = 1, \quad \alpha^3 = \frac{1}{\alpha}, \beta^3 = \frac{1}{\beta}, \gamma^3 = \frac{1}{\gamma}$
 $\therefore (\text{준식}) = (1 - \frac{1}{\alpha})(1 - \frac{1}{\beta})(1 - \frac{1}{\gamma}) = 1 - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}) + (\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}) - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$
 $= 1 - \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

해설

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 을 인수분해 하면 $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$
그러므로 $\alpha = -1, \beta = i, \gamma = -i$ 라 놓을 수 있다.(순서를 바꾸어도 상관 없음)
 $(1 - \alpha^3)(1 - \beta^3)(1 - \gamma^3) = (1 + 1)(1 + i)(1 - i)$
 $= 2(1 + 1) = 4$

32. x, y, z 에 대한 다음 연립방정식의 근의 곱이 음의 정수이고, 합이 양의 정수일 때, $x + y + z$ 의 최댓값을 구하면?

$$\begin{cases} 2x - y + z = a & \cdots \cdots \textcircled{A} \\ x + 2y + 2z = 3a - 11 & \cdots \cdots \textcircled{B} \\ 3x - y + 2z = 2a - 2 & \cdots \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

- ① 2 ② -2 ③ 3 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

$\textcircled{A} \times 2 - \textcircled{B}$ 에서 $3x - 4y = -a + 11$
 $\textcircled{B} - \textcircled{C}$ 에서 $-2x + 3y = a - 9$
 $\therefore x = a - 3, y = a - 5,$
 $\textcircled{A}$ 에서 $z = 1$
 $xyz = (a - 3)(a - 5) \cdot 1 < 0$
 $\therefore 3 < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{D}$
 $x + y + z = (a - 3) + (a - 5) + 1 = 2a - 7 > 0$
 $\therefore a > \frac{7}{2} \cdots \cdots \textcircled{E}$
 $\textcircled{D}, \textcircled{E}$ 에서 $\frac{7}{2} < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{F}$
그런데 $x + y + z$ 는 정수이므로 $2a - 7$ 은 정수이고 $2a$ 도 정수이다.
 $\textcircled{F}$ 에서 $7 < 2a < 10$
 $\therefore 2a = 8$ 또는 $9 (\because 2a$ 는 정수)
 $\therefore a = 4$ 또는 $\frac{9}{2}$
 $\therefore x = 1, y = -1, z = 1$ 또는 $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 1$
 $\therefore x + y + z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$

33. 볼록한 n 각형의 n 개의 내각 중에서 $n-3$ 개의 각은 모두 90° 이하이고, 나머지 각은 90° 보다 클 때, n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

볼록 n 각형의 내각의 총합은 $180^\circ(n-2)$ 이다.

$n-3$ 개의 각은 모두 90° 이하이고,

나머지 각, 즉 3 개의 각이 둔각이므로

$$180^\circ(n-2) < 90^\circ(n-3) + 180^\circ \times 3$$

$$2(n-2) < n-3+6$$

$$\therefore n < 7$$

따라서 n 의 최댓값은 6 이다.

34. $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$ (단, n 은 정수)인 실수 x 에 대하여 $\{x\} = n$ 으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2 - x - \frac{1}{2}\right\} = 3x + 1$ 의 근을 α, β 라 하자. 이 때, $9\alpha\beta$ 의 값을 구하면?

① 13 ② -13 ③ 15 ④ -15 ⑤ 17

해설

$3x + 1$ 은 정수이므로

$$(3x + 1) - \frac{1}{2} \leq x^2 - x - \frac{1}{2} < (3x + 1) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore 5 \leq x^2 - 4x + 4 < 6$$

$$\therefore 5 \leq (x - 2)^2 < 6$$

이때, $3x + 1$ 이 정수이므로 $3x$ 도 정수,

$$3x = k(k \text{는 정수}) \text{라 하면 } x = \frac{k}{3}$$

$$\therefore 5 \leq \left(\frac{k-6}{3}\right)^2 < 6$$

$$\therefore 45 \leq (k-6)^2 < 54 \quad \therefore k = -1, 13$$

$$k = -1 \text{ 일 때 } x = -\frac{1}{3},$$

$$k = 13 \text{ 일 때 } x = \frac{13}{3}$$

$$\therefore 9\alpha\beta = -13$$