

1. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

2. $P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ 의 값을 구하면?

- ① $2^{32} - 1$ ② $2^{32} + 1$ ③ $2^{31} - 1$
④ $2^{31} + 1$ ⑤ $2^{17} - 1$

해설

주어진 식에 $(2 - 1) = 1$ 을 곱해도 식은 성립하므로
 $P = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$
 $= \quad \vdots$
 $= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)$
 $= 2^{32} - 1$

3. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

4. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$ 로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$ 이 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하도록 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 1, b = 2$ ② $a = 2, b = 2$ ③ $a = 2, b = 0$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = 0, b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$$

이 식을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$$

이 등식이 임의의 x, y 에 대하여 성립하므로

$$a - 2b - 2 = 0, a - b - 2 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

5. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x+q$ 라 하면 (일반적으로 $px+q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x+q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x-2)(x-1)(x+q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

6. 다항식 $f(x)$ 를 $(3x+2)(x-4)$ 로 나눈 나머지가 $-2x+1$ 일 때, $f(x^2+3)$ 을 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① 7 ② 4 ③ 0 ④ -4 ⑤ -7

해설

$$f(x) = (3x+2)(x-4)Q(x) - 2x+1 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x^2+3) = (x-1)Q'(x) + R \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $x=4$ 를 대입하면 $f(4) = -7$

②의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(4) = R$

$\therefore R = -7$

7. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ = (x + 2)(x - 1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

8. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 + x &= A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4) + 24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\} + 24 \\&= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 24 \\&= (A-2)(A-12) + 24 \\&= A^2 - 14A + 48 = (A-6)(A-8) \\&= (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2 + x - 8) \\ \therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8) = 10\end{aligned}$$

9. $\frac{2012^3 + 1}{2012 \times 2011 + 1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\frac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1007}{1006}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)} \\ &= 2013 \text{ 이므로} \\ \therefore \frac{a+1}{a-1} &= \frac{2013+1}{2013-1} = \frac{2014}{2012} = \frac{1007}{1006} \end{aligned}$$

10. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

11. 복소수 $x = a + bi$ (a, b 는 실수)가 $x^2 = 3 + 4i, x^3 = 2 + 11i$ 를 만족할 때 $a + b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3 + 4i)(a + bi) \\ &= (3a - 4b) + (4a + 3b)i \\ (3a - 4b) + (4a + 3b)i &= 2 + 11i \\ 3a - 4b = 2, 4a + 3b &= 11 \\ \therefore a = 2, b = 1 \text{ 이므로 } a + b &= 3\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x &= \frac{x^3}{x^2} = a + bi \\ \frac{2 + 11i}{3 + 4i} &= \frac{(2 + 11i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\ &= \frac{50 + 25i}{25} \\ &= 2 + i \\ \therefore a = 2, b = 1\end{aligned}$$

12. 복소수 z 의 켈레복소수가 \bar{z} 일 때, 등식 $(1-i)\bar{z} + 2iz = 3-i$ 를 만족시키는 z 를 구하면?

- ① $z = -1 - 2i$ ② $z = -2 - 2i$ ③ $z = -3 - 2i$
④ $z = -3 - 3i$ ⑤ $z = -3 - 4i$

해설

복소수 $z = x + yi$ (x, y 는 실수), $\bar{z} = x - yi$ 라 놓으면
(준식) $= (1-i)(x-yi) + 2i(x+yi) = 3-i$
 $x-yi-xi-y+2xi-2y = 3-i$
 $(x-3y) + (x-y)i = 3-i$
복소수의 상등에 의하여
 $x-3y = 3, x-y = -1$
 $x = -3, y = -2$
 $\therefore z = -3 - 2i$

13. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α 라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$ 이므로

$$\alpha + \alpha + 2 = \frac{2k}{9} \dots\dots\text{㉠}$$

$$\alpha(\alpha + 2) = \frac{k - 5}{9} \dots\dots\text{㉡}$$

$$\text{㉠에서 } \alpha = \frac{k}{9} - 1,$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$k^2 - 9k - 36 = 0, (k - 12)(k + 3) = 0$$

$$\therefore k = 12, -3$$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$$\frac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{9} = 2 \text{에서}$$

$$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$k^2 - 9k - 36 = 0 \therefore k = 12, -3$$

14. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 - i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

① -20 ② -12 ③ 5 ④ 12 ⑤ 20

해설

한 근이 $2 - i$ 이면 다른 한 근은 $2 + i$

두 근의 합 : $4 = -a$

두 근의 곱 : $5 = b$

$\therefore ab = -20$

15. 다음 x 의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m 의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m) - x(7-m^2) = 18 - m^2$$

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
 $\alpha + \beta = 0, \alpha\beta < 0$
준식을 x 에 관해서 정리하면,
 $3x^2 + (m^2 - 3m - 10)x + m^2 + 3m - 18 = 0$
따라서, $\alpha + \beta = \frac{-(m^2 - 3m - 10)}{3} = 0,$
즉 $m^2 - 3m - 10 = 0$
 $(m-5)(m+2) = 0 \quad \therefore m = 5, -2 \dots\dots\textcircled{㉠}$
 $\alpha\beta = \frac{m^2 + 3m - 18}{3} < 0, m^2 + 3m - 18 < 0$
 $(m-3)(m+6) < 0 \quad \therefore -6 < m < 3 \dots\dots\textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통범위에 의해 $m = -2$

16. $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=1$, $abc=1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

- ① 3 ② -3 ③ 1 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ 1 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2 \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3 &= 1 \cdot (-1 - 1) = -2 \\ \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= 1\end{aligned}$$

17. $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 14$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $xy = -1$ ② $x^2 + y^2 = 6$ ③ $x^4 + y^4 = 34$

④ $x^5 + y^5 = 86$ ⑤ $x^6 + y^6 = 198$

해설

① $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ 에서
 $14 = 2^3 - 3xy \times 2$

$\therefore xy = -1$

② $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 에서

$x^2 + y^2 = 2^2 - 2(-1) = 6$

③ $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ 에서

$x^4 + y^4 = 6^2 - 2(-1)^2 = 34$

④ $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y)$ 에서

$x^5 + y^5 = 6 \times 14 - (-1)^2 \times 2 = 82 \neq 86$

⑤ $x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3$ 에서

$x^6 + y^6 = 14^2 - 2(-1)^3 = 198$

18. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,

$f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0
- ② a_0
- ③ a_1
- ④ a_5
- ⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
 $\therefore f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$
 $f(\alpha) = f(0) = a_0$

19. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때의 나머지가 $3x$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① 3

② $3x + 3$

③ $3x - 3$

④ $6x - 9$

⑤ $9x + 6$

해설

$$f(x) = (x-2)(x-1)Q(x) + 3$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)Q'(x) + 3x$$

$\therefore f(2) = 3, f(3) = 9f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q''(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 9$$

$$a = 6, b = -9$$

\therefore 나머지는 $6x - 9$

20. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2$, $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$ 라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
 $\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2$, $\alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A 식에 대입하면
 $-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \therefore a = -2$

21. x 에 관한 세 개의 다항식 $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $C(x) = x(x-3)(x^2+a) - (x-3)(x^2+b) + 8$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ 2

해설

$$A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$

$$B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$$

\therefore 두 다항식의 최대공약수는 $(x-1)(x+1)(x-3)$

그런데 다항식 $C(x)$ 는 $x-3$ 으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 이다.

$$\therefore \text{다항식 } C(\pm 1) = 0$$

$$\therefore C(1) = -a + b + 4 = 0, C(-1) = a + b + 4 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = -4 \text{에서 } a + b = -4$$

22. $x^2 + ax + b$, $x^2 + bx + a$ 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, 최소공배수는?

- ① $(x-2)(x-a)(x-b)$ ② $(x+2)(x-a)(x-b)$
 ③ $(x+1)(x+a)(x+b)$ ④ $(x+1)(x-a)(x-b)$
 ⑤ $(x-1)(x-a)(x-b)$

해설

$$\begin{cases} x^2 + ax + b \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + bx + a \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} - \textcircled{B} : (a-b)(x-1)$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서 $a \neq b$ 이므로 최대공약수는 $x-1$ 이다.

$$1 + a + b = 0, a = -1 - b, b = -1 - a$$

이 때, \textcircled{A} 은 $x^2 - (1+b)x + b = (x-1)(x-b)$

$$\textcircled{B}$$
 은 $x^2 - (1+a)x + a = (x-1)(x-a)$

여기서, $a \neq b$ 이므로 $x-a$ 와 $x-b$ 는 서로 소이다.

따라서, 구하는 최소공배수는 $(x-1)(x-a)(x-b)$

23. x 에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 a 의 값을 구하면?

- ① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$$(ax^2 + 3x + 2a) + (-ax^2 + 2ax + 3)i = 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$ax^2 + 3x + 2a = 0 \dots\dots \text{㉠}$$

$$-ax^2 + 2ax + 3 = 0 \dots\dots \text{㉡}$$

㉠ + ㉡ 하면

$$(2a+3)x + (2a+3) = 0, (2a+3)(x+1) = 0$$

$$2a+3 = 0 \text{ 또는 } x+1 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = -1$$

i) $a = -\frac{3}{2}$ 일 때

$$\text{㉠식에서 } -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 3 = 0, x^2 - 2x + 2 = 0$$

이므로 허근을 가진다. $\therefore a \neq -\frac{3}{2}$

ii) $x = -1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$$a - 3 + 2a = 0, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

24. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ㉠ 1 ㉡ $1-i$ ㉢ $1+i$ ㉣ -1 ㉤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

25. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β 를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 일 때, 이 이차 방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$

② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 - 2x + 3 = 0$

④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$$\alpha = m + ni, \beta = m - ni$$

(m, n : 실수, $n \neq 0$)라 놓으면

$$\alpha^2 + 2\beta = (m + ni)^2 + 2(m - ni)$$

$$= (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m - 1)i = 1 \text{에서}$$

$n \neq 0$ 이므로 $m = 1, n^2 = 2$

$$\alpha + \beta = 2m = 2$$

$$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$$

$\therefore \alpha, \beta$ 를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$