

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 9$$

$$(i) \ t = 4 \text{ 일 때, } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$(ii) \ t = 9 \text{ 일 때, } x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

따라서 모든 해의 합은

$$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$$

2. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ 의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2\sqrt{6}$

해설

$$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -3, 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$$

$$= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$$

3. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$ 의 근 중에서 무리수인 두 근을 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -6

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$

$$(x - 3)(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근이 a, b ($\because$ 무리수)

$$a + b = 4$$

4. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 + 8 = 12(x^2 + x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1

② 0

③ -1

④ -2

⑤ -3

해설

$$x^2 + x = Y \text{ 라 하면, } (Y + 2)^2 + 8 = 12Y$$

$$Y^2 - 8Y + 12 = 0, (Y - 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = 2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$(i) Y = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) Y = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore \text{ 모든 근의 합} = -2$$

5. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$ 을 풀면?

① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$

② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$

③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$

④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$

⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$$x(x+6) = x^2 + 6x$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$

$$x^2 + 6x = X \text{ 로 놓으면}$$

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$$

$$X(X+8) + 15 = 0,$$

$$X^2 + 8X + 15 = 0$$

$$(X+3)(X+5) = 0$$

$$\therefore X = -3, X = -5$$

$$\textcircled{㉠} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$$

$$\textcircled{㉡} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$$

6. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t(t - 2) - 3 = 0,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ t = 3, \text{ 즉 } x^2 - 2x = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$(ii) \ t = -1, \text{ 즉 } x^2 - 2x = -1 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ (중근)}$$

$$\text{따라서, } -1 \times 3 \times 1 = -3$$

7. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

$x^2 = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x^2 = 3 \text{ 일 때, } x = \pm\sqrt{3}$$

$$(ii) \ x^2 = -1 \text{ 일 때, } x = \pm i$$

(i), (ii) 에서 실근의 합을 구하면

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$$

8. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$ 을 변형하면

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

9. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 이 중근을 가질 때, 실수 a 의 값들의 합을 구하면?

① 2

② 4

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 에서

i) 1이 중근일 경우

$x^2-ax+2a=0$ 에 $x=1$ 을 대입하면 성립해야 하므로

$$1-a+2a=0, a=-1$$

ii) 1이 중근이 아닌 경우

$x^2-ax+2a=0$ 이 중근을 가지므로 판별식 $D=0$ 에서

$$D=a^2-8a=0, a(a-8)=0, a=0, 8$$

$$\therefore 0+8-1=7$$

10. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$ 의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$$

이 식을 정리하면

$$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$$

무리수가 서로 같은 조건에 의하여

$$260 - 26m = 0, 160 - 16m = 0$$

따라서, $m = 10$

계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$ 가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라고 하면 근과 계수와의 관계에서

$$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \alpha = m - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 8\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢} \text{을 } \textcircled{㉣} \text{에 대입하면 } 8(m - 8) = 2m - 4$$

$$\therefore m = 10$$

11. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

①

10

② 20

③ 30

④ 40

⑤ 50

해설

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{17}{1} = 17$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a} = -\frac{(-10)}{1} = 10$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= (8)^2 - 2 \cdot (17) = 30 \end{aligned}$$

$$-2\alpha\beta\gamma = -2 \cdot 10 = -20$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma = 10$$

12. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4 - 1 + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서 $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

13. 삼차방정식 $x^3 + ax + 16 = 0$ 이 중근 α 와 다른 실근 β 를 가질 때, 상수 a 의 값은?

- ① -12 ② -14 ③ -16 ④ -18 ⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \alpha + \beta = 0, \beta = -2\alpha$$

$$\alpha \times \alpha \times \beta = -16 \text{에서}$$

$$-2\alpha^3 = -16, \alpha = 2, \beta = -4$$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

$$\text{일차항의 계수} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha = a$$

$$\therefore a = -12$$

14. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = 5, 5\alpha = 5$$

$$\alpha = 1$$

$$-a = (1 + 2i) + (1 - 2i) + 1 = 3$$

$$a = -3$$

$$b = (1 + 2i)(1 - 2i) + (1 - 2i) + (1 + 2i) = 7$$

$$\therefore a + b = 4$$

15. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)에서 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 두고 $x = 1 + 2i$ 를 대입하면 $f(1 + 2i) = (1 + 2i)^3 + a(1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + c = 0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11 - 3a + b + c) + (-2 + 4a + 2b)i = 0$ a, b, c 가 실수이므로 이제 $x = 1 - 2i$ 를 대입하면 $f(1 - 2i) = (1 - 2i)^3 + a(1 - 2i)^2 + b(1 - 2i) + c = (-11 - 3a + b + c) - (-2 + 4a + 2b)i = 0$ 따라서 ((가))

(가)에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

- ① 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 이면, $1 - 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ② 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 이면, $1 + 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ③ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 - 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ④ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 + 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ⑤ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

$x = 1 + 2i$ 를 대입한 결과와 $x = 1 - 2i$ 를 대입한 결과가 같다.

16. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 계수가 유리수이므로

세 근을 $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \alpha$ 라고 하면

$$(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + \alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\alpha = -a \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha = b \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠에서 $\alpha = -2$ 를 ㉡에 대입하면

$$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore a = 5$$

$$\alpha = -2 \text{를 } \textcircled{㉢} \text{에 대입하면 } b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$$

$$\therefore a + b = 5 + 2 = 7$$

17. 사차방정식 $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}}$ 과 값이 같은 것은?

- ① $\alpha + 1$ ② $\alpha - 2$ ③ $\frac{2}{\beta}$ ④ -1 ⑤ 1

해설

$$x^4 + x^3 - x - 1 = 0$$

$$x^3(x+1) - (x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3-1) = 0$$

$$\rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x^2+x+1=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1, \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}} = (\alpha^3)^{33}\alpha + \frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta}$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta + 1}{\beta} = \frac{2}{\beta}$$

18. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

㉠ $\omega^6 = 1$

㉡ $\omega^2 = \bar{\omega}$

㉢ $\omega + \bar{\omega} = -1$

㉣ $\omega^2 + \omega = -1$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로,

$$\omega^3 = 1, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 켈레근 $\bar{\omega}$ 일 경우도

$$\bar{\omega}^3 = 1, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$$

㉠ $\omega^3 = 1, (\omega^3)^2 = 1 \rightarrow (\bigcirc)$

㉢ $\omega + \bar{\omega} = -1,$

$$\bar{\omega} = -1 - \omega = -(\omega + 1)$$

$\omega^2 + \omega + 1$ 을 이용.

$\omega + 1 = -\omega^2$ 이므로 $\bar{\omega} = \omega^2 \rightarrow (\bigcirc)$

㉡ 두 근 $\omega, \bar{\omega}$ 의 합은

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근의 합이므로

$$\omega + \bar{\omega} = -1$$

㉣ $\omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$$\omega^2 + \omega = -1 \rightarrow (\bigcirc)$$

19. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ ω

⑤ $-\omega$

해설

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\Rightarrow (\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$$

$$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + \omega = -1$$

20. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉤ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉥ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉤

④ ㉢, ㉤, ㉥

⑤ ㉠, ㉢, ㉤, ㉥

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉤}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉥}$$

21. 어떤 정육면체의 밑변의 가로 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)



답 :

cm



정답 : 2cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

$$\text{조건으로부터 } (x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3,$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3,$$

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0 \text{ 을 풀면 } x = 2(\text{cm})$$

22. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합은?

① 30

② 25

③ 23

④ 18

⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$ 라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$$\text{i) } D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0 \\ \therefore a < -8 \text{ 또는 } a > 4$$

$$\text{ii) } a > 0$$

$$\text{iii) } 8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$$

$$\therefore 4 < a < 8 \text{ 이므로 } a = 5, 6, 7$$

23. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = -1$$

24. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$1 = 0$ 이 되어 모순이므로 $x \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

여기서 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면

$$X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$$

$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = 2$$

(i) $X = -7$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -7 \text{에서}$$

$$x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

(ii) $X = 2$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = 2 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

(i), (ii)로부터

$$x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 모든 근의 합은

$$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6 \text{이다.}$$

25. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을
 x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

26. 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3) = 0$ 의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\frac{x^2 \text{의 계수}}{x^3 \text{의 계수}}\right)$ 이므로

x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.

최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을

$f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3이므로

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + d$$

$$f(2x+3)$$

$$= (2x+3)^3 - 3 \cdot (2x+3)^2 + b \cdot (2x+3) + d$$

3차항과 2차항의 계수를 중심으로

식을 정리하면

$$8x^3 + 24x^2 + \dots = 0$$

$$\therefore \text{세 근의 합} = -3$$

해설

$f(2x+3) = 0$ 의 세 근을

각각 p, q, r 이라 하면,

$$2p+3 = \alpha \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2q+3 = \beta \cdots \textcircled{㉡}$$

$$2r+3 = \gamma \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 에서

$$2(p+q+r) + 9 = 3$$

$$\therefore p+q+r = -3$$

27. 방정식 $x^{11} = 1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1)$ 의 값은?

① 1

② -1

③ i

④ $-i$

⑤ 10

해설

$x^{11} - 1 = (x - 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x = -1$ 을 대입하면 $1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = (-1 - \alpha_1)(-1 - \alpha_2) \cdots (-1 - \alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1) = 1$

28. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x}$ 의 값은? (단, x 는 실수)

① $-1 + \sqrt{6}$

② $-1 - \sqrt{6}$

③ $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$ 이므로

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1^2}{x} = 0$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1^2}{x}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면}$$

$$(t^2 - 2) + 2t - 3 = 0, \quad t^2 + 2t - 5 = 0$$

$$\therefore t = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$(ii) \quad x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$$

그런데 $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$ 이므로

($\because x$ 는 실수)

$$\therefore x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{6}$$

29. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 α 는 $f(x) + 1 = 0$ 의 한 정수근이고 β 는 $f(x) - 1 = 0$ 의 한 정수근일 때, $\beta - \alpha$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f(\alpha) + 1 = 0, f(\beta) - 1 = 0$ 이므로 $f(\beta) - f(\alpha) = 2$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 정수)로 놓으면

$$f(\beta) - f(\alpha) = a(\beta^3 - \alpha^3) + b(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) = 2$$

$$(\beta - \alpha) \{a(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + b(\beta + \alpha) + c\} = 2$$

따라서 $\beta - \alpha$ 는 2의 약수이어야 한다.

$$\therefore \beta - \alpha = \pm 1 \text{ 또는 } \pm 2$$

30. $f(x) = x^3 - p$, $g(x) = x^3 - 2x$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근을 α , β , γ 라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$ 의 값을 p 로 바르게 나타낸 것은?

① p^3

② $-p^3 + 2p$

③ $-3p^3$

④ $3p^3 - 6p$

⑤ $p^3 - 8p$

해설

$x^3 - p = 0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 하면

$$\alpha^3 - p = 0, \beta^3 - p = 0, \gamma^3 - p = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0,$$

$$\alpha\beta\gamma = p \text{ 이 성립한다.}$$

이 때,

$$g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) = (\alpha^3 - 2\alpha)(\beta^3 - 2\beta)(\gamma^3 - 2\gamma) = (p - 2\alpha)(p - 2\beta)(p - 2\gamma)$$

$$= p^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)p^2 + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)p - 8\alpha\beta\gamma = p^3 - 8p$$

31. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해를 α, β 라고 할 때, 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta, f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta, f(0) = -1$ 을 만족한다. 이 때 $ab + cd$ 의 값은?

① -5

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 5

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 : α, β ,

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$

$f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$,

$f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$ 이므로

$f(x) - x = a(x - \alpha)(x - \beta) \{x - (\alpha + \beta)\}$

$f(0) = -1 \Rightarrow -1 = -a\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$\therefore a = 1 (\because \alpha\beta = 1, \alpha + \beta = 1)$

$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - 1) + x$

$(\because \alpha + \beta = 1)$

$f(x) = x^3 - (\alpha + \beta + 1)x^2 + (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)x - \alpha\beta$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a = 1, b = -2, c = 3, d = -1$

$\therefore ab + cd = -2 - 3 = -5$

32. 다음 조건을 만족시키는 z_1, z_2, z_3 에 대하여 이것을 근으로 갖는 삼차방정식을 구하면? (단, $z_i (i = 1, 2, 3)$ 는 복소수, $z = \alpha + \beta i$ 일 때, $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, z_1 + z_2 + z_3 = 1, z_1 z_2 z_3 = 1$$

- ① $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ ② $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
 ③ $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ④ $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$
 ⑤ $2x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$

해설

$$z_1 = \alpha + \beta i \text{라고 하면 } \bar{z}_1 = \alpha - \beta i$$

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_1 &= (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 = |z_1|^2 = 1 \end{aligned}$$

마찬가지로 풀면 $z_2 \bar{z}_2 = 1, z_3 \bar{z}_3 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 &= \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \\ &= \bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ &= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1 \\ (\because z_1 z_2 z_3 &= 1) \end{aligned}$$

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} z_1, z_2, z_3 \text{를 근으로 갖는 방정식은} \\ x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

33. 방정식 $x^3 + 2x^2 + px + q = 0$ 이 한 실근과 두 허근 α, α^2 을 가질 때, 실수 p, q 의 곱은?

① -2

② 2

③ -3

④ 3

⑤ 1

해설

(i) 한 허근을 $\alpha = a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 $\alpha^2 = a-bi$
($\because$ 계수가 실수인 방정식)

$$\therefore (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

$$a^2 - b^2 = a \dots\dots\dots ①$$

$$2ab = -b \dots\dots\dots ②$$

①, ② 에서 $b \neq 0$ 이므로

$$a = -\frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ 라 하면 } \alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(ii) α, α^2 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + x + 1 = 0$
한 실근을 β 라고 할 때, 세 근의 합은

$$\beta + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 \therefore \beta = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + 2x^2 + px + q \\ = (x^2 + x + 1)(x + 1) \end{aligned}$$

$$= x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore p = 2, q = 1$$

$$\therefore pq = 2$$

34. 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + \dots + (\alpha^{100} + \beta^{100})$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의
서로 다른 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$

또, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

n 이 양의 정수일 때,

$$\alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} + \alpha^n$$

$$= \alpha^n(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\beta^{n+2} + \beta^{n+1} + \beta^n$$

$$= \beta^n(\beta^2 + \beta + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + \dots + (\alpha^{100} + \beta^{100})$$

$$= \alpha + \{(\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4) + \dots + (\alpha^{98} + \alpha^{99} + \alpha^{100})\}$$

$$+ \beta + \{(\beta^2 + \beta^3 + \beta^4) + \dots + (\beta^{98} + \beta^{99} + \beta^{100})\}$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

35. α, β 를 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이라 하고 $P(n) = \alpha^n + \beta^n$ 라 할 때, $P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x^3-1=0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

따라서 $n \geq 2$ 인 모든 정수에 대해

$$\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} = 0 \text{ 이고,}$$

β 에 대해서도 마찬가지이다.

$$P(3n) + P(n) + P(n-1) + P(n-2)$$

$$= (\alpha^{3n} + \beta^{3n}) + (\alpha^n + \beta^n)$$

$$+ (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$$

$$= (1 + 1) + (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2})$$

$$+ (\beta^n + \beta^{n-1} + \beta^{n-2})$$

$$= 2 + 0 + 0 = 2$$