**1.** 다음 조건을 만족하는 집합 $A$ 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 $A$ 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$ , $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 $A$ 를 구하면,

$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \cdots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$

,

$a_2 = \frac{3}{2}$ , $a_3 = \frac{9}{4}$ , $a_5 = \frac{81}{16}$ 이다.

$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$

**2.** 집합 $U = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ 의 부분집합 중 2개의 원소로 이루어진 부분집합 전체를 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ 이라하고, 집합 $A_k$ 의 원소의 합을 $a_k(k = 1, 2, \cdots, 10)$ 이라 할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 104　② 106　③ 108　④ 110　⑤ 112

해설

$U$는 원소가 5개이므로 2개의 원소로 이루어진 부분집합의 개수는 5개의 원소 중에서 2개를 택하는 방법의 수 $(5\times4) \div 2 = 10$과 같다. 따라서, 각 $k$에 대하여 $a_k$는 두 원소의 합이므로 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$은 20 개의 원소의 합이다. 이 때, 2, 3, 5, 7, 11 의 5개의 수가 고르게 포함되므로 5 개의 수가 각각 4번씩 더해진다.
따라서, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 4 \times (2 + 3 + 5 + 7 + 11) = 112$

**3.** 집합 $A = \{x|x\text{는 } m\text{보다 작거나 같은 자연수}\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개 이상인 부분집합을 차례로 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_N$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족하는 $m$ 값을 구하여라. (단, $S(A)$ 는 집합 $A$ 의 원소의 총합이다.)

$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_N) = 225$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x|x$ 는 $m$ 보다 작거나 같은 자연수$\} = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$
집합 $A$ 의 모든 부분 집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 $2^{m-1}$ (번) 이고, 원소가 1 개 이하인 부분집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 1 번이므로,

$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_N) = (2^{m-1} - 1) \times \left(\frac{m(m+1)}{2}\right) = 225$

$225 = 3^2 \times 5^2$ 이고, $2^{m-1} - 1 \le 255$ 인 범위에서 $2^{m-1} - 1$ 은 $5^2 = 25$ 의 배수가 될 수 없으므로,

$\frac{m(m+1)}{2}$ 은 5 의 배수가 되어야 한다.

$\frac{m(m+1)}{2}$ 이 5 의 배수가 되도록 작은 수부터 차례로 넣어보면

$m = 5$

**4.** 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합이 $A,\ B$ 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 $(A, B)$ 의 개수를 구하여라.

| |
|---|
| (1) $A \cap B = \varnothing$ |
| (2) $A \cup B = U$ |

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A \cap B = \varnothing$ 이고 $A \cup B = U$ 이면 $n(A) + n(B) = n(U) = 4$

$n(A) = 0,\ n(B) = 4$ 인 경우 : 1 개

$n(A) = 1,\ n(B) = 3$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 2,\ n(B) = 2$ 인 경우 : 6 개

$n(A) = 3,\ n(B) = 1$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 4,\ n(B) = 0$ 인 경우 : 1 개

따라서 순서쌍 $(A, B)$ 의 개수는 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ (개)

**5.** 전체집합 $S = \left\{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 가 있다. $A \cap B = \varnothing$ , $B^c = \{1, 7, 8, 9\}$ , $S - (A^c \cup B) = \{1, 7\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$S = \left\{x \mid x\text{는 } 10\text{이하의 자연수}\right\} = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
$B^c = \{1, 7, 8, 9\}$ 이면 $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 10\}$
$S - (A^c \cup B) = S \cap (A^c \cup B)^c$
$(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B$
$A \cap B = \varnothing$ 이므로 $A - B = A$
따라서 $S - (A^c \cup B) = S \cap A = \{1, 7\}$
$\therefore n(A \cup B) = 8$

**6.** 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A$ , $B$ 에 대하여 $A \cap \{1, 3\} = B$ , $B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 이면 $B \subset A$ , $\{2, 3, 4\} \subset A$
$A \cap \{1, 3\} = B$ 이면 $\{3\} \subset B \subset \{1, 3\}$
따라서 $B$ 는 $2, 4, 5$ 를 원소로 가질 수 없으므로 $n(B)$ 의 최댓값은 2
$n(B) = 2$ 일 때, $B = 1, 3$ 이고, $A \cap \{1, 3\} = B$ 에서 $1 \in A$
또, $5 \in A$ 라고 가정하면, $B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 에서 $5 \in B$ 이어야 하므로 모순
따라서 $5 \notin A$ , $n(A)$ 의 최댓값은 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때 4
따라서 $n(A) + n(B)$ 의 최댓값은 $2 + 4 = 6$

**7.** 집합 $P$ 의 모든 원소의 합을 $s(P)$ , 집합 $P$ 의 부분집합을 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_N$ 으로 정의한다. 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , $B = \{a+2 | a \in A\}$ 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 $A$, $B$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

- $A \cap B = \varnothing$
- $s(B_1) + s(B_2) + s(B_3) + \cdots + s(B_N) = 128$

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

집합 $B$ 를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{a_1+2, a_2+2, a_3+2, a_4+2\}$ ,
집합 $B$ 의 모든 부분집합의 원소의 합에서 각 원소는 $2^{4-1}$ 번 나오므로
$s(B_1) + s(B_2) + s(B_3) + \cdots + s(B_N) = 2^{4-1} \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 8) = 128 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$ ,
또, $A \cap B = \varnothing$ 이므로 집합 $A$, $B$ 의 모든 원소의 합은
$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 8) = 24$

**8.** 자연수를 원소로 하는 세 집합 $A = \{x|2 \le x \le 10\}$, $B = \{x|5 \le x \le 12\}$, $C = \{x|9 \le x \le 15\}$ 에 대하여 $A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라 할 때, $n((B \odot C) \odot A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이므로,

$$\begin{aligned}
&((B \odot C) \odot A) \\
&= (((B \cup C) - (B \cap C)) \odot A) \\
&= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \odot \{x|2 \le x \le 10\}) \\
&= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cup \{x|2 \le x \le 10\}) \\
&\quad -(\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cap \{x|2 \le x \le 10\}) \\
&= \{2, 3, 4, 9, 10, 13, 14, 15\}
\end{aligned}$$

$\therefore \ n((B \odot C) \odot A) = 8$

**9.** 두 집합 $A$, $B$ 에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라 정의할 때, 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $A \triangle B = B \triangle A$

② $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

③ $A \triangle A = \varnothing$ 이고 $A \triangle \varnothing = A$ 이다.

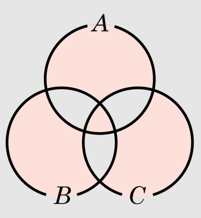
④ $A \triangle A \triangle A \triangle \cdots \triangle A = \varnothing$

⑤ $A \triangle B = C$ 이면 $B = A \triangle C$ 이다.

해설

①, ③은 자명하다.

② 벤 다이어그램으로 그려 보면 좌,우변이 모두 같은 그림으로 그려진다. (아래 그림)




④

( i ) $A$ 가 짝수개 있을 때 :

$(A \triangle A) \triangle (A \triangle A) \triangle \cdots \triangle (A \triangle A)$

$= \varnothing \triangle \varnothing \triangle \cdots \triangle \varnothing = \varnothing$

( ii ) $A$ 가 홀수개 있을 때 :

$\underbrace{(A \triangle A \triangle \cdots \triangle A)}_{\text{짝수개}} \triangle A = \varnothing \triangle A = A$

⑤ $A \triangle B = C$ 이므로 $A \triangle (A \triangle B) = A \triangle C$ 이다. 이 때, (좌변) $= (A \triangle A) \triangle B = \varnothing \triangle B = B$ $\therefore$ $B = A \triangle C$

**10.** 집합 $A_n = \left\{x | n \le x < 6n+5,\ n\text{은 자연수}\right\}$ 에 대하여 $S(n) = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 이라고 정의한다. $n(S(n)) \ge 1$ 을 만족하는 $n$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{x|1 \le x < 11\}$ ,
$A_2 = \{x|2 \le x < 17\}$ ,
$A_3 = \{x|3 \le x < 23\}$ ,

$\vdots$

$A_{10} = \{x|10 \le x < 65\}$ ,
$A_{11} = \{x|11 \le x < 71\}$ ,
따라서 $n \ge 11$ 이 되면 $n(S(n)) = 0$ 이 되므로 $n$ 의 최댓값은 10

**11.** 전체 50 명의 학생 중 $A$ 문제집을 가지고 있는 학생은 30 명, $B$ 문제집을 가지고 있는 학생은 27 명이다. $A, B$ 문제집 중 한 권만을 가지고 있는 학생 수의 최댓값을 $p$ , 최솟값을 $q$ 라고 할 때, $p-q$ 를 구하여라.

▶ 답: ______ 명

▷ 정답: 40 명

해설

전체 학생의 집합을 $U$ , $A$ 문제집을 가지고 있는 학생의 집합을 $A$ , $B$ 문제집을 가지고 있는 학생의 집합을 $B$ 라 두면, $A, B$ 문제집 중 한 권만을 가지고 있는 학생의 집합은 $(A \cup B) - (A \cap B)$ ,
$n(U) = 50, n(A) = 30, n(B) = 27$ 이므로,
$30 \le n(A \cup B) \le 50, 7 \le n(A \cap B) \le 27$
따라서, $3 \le n((A \cup B) - (A \cap B)) \le 43$
$\therefore p - q = 43 - 3 = 40$

**12.** 다음 중 거짓인 명제는? (단 $x,\ y,\ z,\ a,\ b$ 는 실수이다.)

① 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 것은 정사각형이다.

② $xy+yz+zx=1$ 일 때, $x^2+y^2+z^2 \ge 1$

③ $a,\ b,\ c$ 가 양수일 때, $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c} \ge 6$

④ $a \ge b \ge 0$ 이면 $\sqrt{a}-\sqrt{b} \le \sqrt{a-b}$

⑤ $xy > x+y > 4$ 이면 $x>2,\ y>2$

해설

① $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립 )

② $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\dfrac{1}{2}\left(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \ge 0$

③ $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \ge 2,\ \dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c} \ge 2,\ \dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a} \ge 2$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

따라서 $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c} \ge 6$

④ $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=2\sqrt{a}\sqrt{b}-2b$

$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \ge 0$

⑤ <반례> $x=\dfrac{3}{2}$, $y=10$

또는 $x=\dfrac{5}{4}$, $y=8$ 등 여러 경우가 있다.

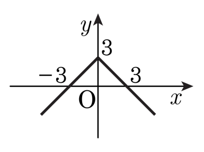
**13.** $x,\ y$ 는 실수이고 $x+y=2$ 일 때, $4^x+4^y+2^{x+1}+2^{y+1}+3$ 의 최솟값은?

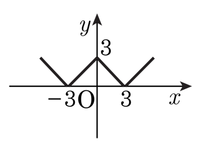
① 16　　② 19　　③ 22　　④ 25　　⑤ 28

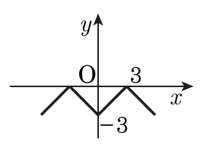
**해설**

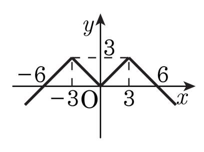
$2^x+2^y=t$라 놓으면 $2^x>0,\ 2^y>0$이므로
$t=2^x+2^y\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}=4$
$\therefore\ t\geq 4$
한편 $4^x+4^y+2^{x+1}+2^{y+1}+3$
$=(2^x+2^y)^2+2(2^x+2^y)-5$
$=t^2+2t-5=(t+1)^2-6$
$t\geq 4$이므로
$t=4$일 때 최솟값 19를 갖는다.

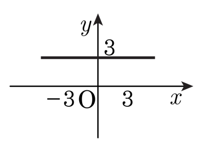
**14.** $f(x)=3-|x|$, $g(x)=|x|-3$ 일 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프는?

①



②


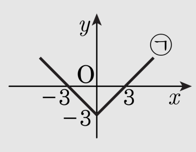

③


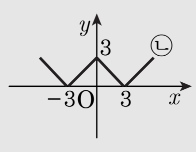

④


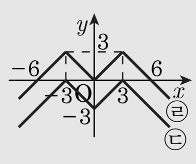

⑤



해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3-||x|-3|$ 이므로
$y=|x|-3$ 의 그래프는 ㉠
$y=||x|-3|$ 의 그래프는 ㉡




$y=-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉢
$y=3-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉣

**15.** 실수 전체집합에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < 0) \\ 2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $g(-4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-2$

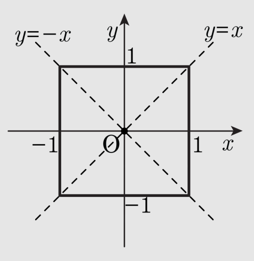
해설

$f^{-1}(x) = g(x)$
$g(-4) = f^{-1}(-4)$
$f^{-1}(-4) = a$ 이면 $f(a) = -4$ 이다.
$\begin{cases} -a^2 = -4(a < 0) \\ 2a = -4(a \geq 0) \end{cases}$
따라서 $a = -2$

**16.** $|y-x|+|y+x|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 ?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설




절댓값의 정의에 의하여

( i ) $y-x \geq 0,\ y+x \geq 0$ 일 때,
$y-x+y+x=2$
$\therefore\ y=1$

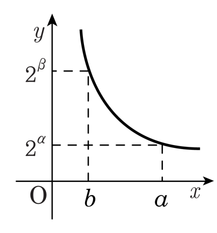
( ii ) $y-x \geq 0,\ y+x < 0$ 일 때,
$y-x-y-x=2$
$\therefore\ x=-1$

(iii) $y-x<0,\ y+x \geq 0$ 일 때, $-y+x+y+x=2$
$\therefore\ x=1$

(iv) $y-x<0,\ y+x<0$ 일 때, $-y+x-y-x=2$
$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ S=2\times2=4$

**17.** 다음 그림은 $f(x) = \frac{2}{x}$의 그래프 이다. $f(a) = 2^{\alpha}, f(b) = 2^{\beta}$이고 $ab = 8$일 때 $\alpha + \beta$의 값은?




① $-2$　　② $-1$　　③ $0$

④ $1$　　⑤ $2$

해설

$\frac{2}{a} = 2^{\alpha}, \ \frac{2}{b} = 2^{\beta}$

$a = 2^{1-\alpha}, \ b = 2^{1-\beta}$

$a \cdot b = 2^{1-\alpha+1-\beta} = 2^{2-(\alpha+\beta)} = 8$

$2 - (\alpha + \beta) = 3$

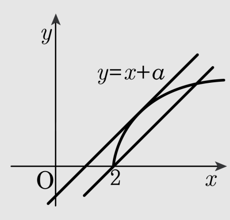
$\therefore \alpha + \beta = -1$

**18.** 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x+a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 $a$ 값의 범위를 정하면?

① $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ② $-2 \le a < -\frac{3}{2}$ ③ $a < -\frac{3}{2}$

④ $a \le -\frac{3}{2}$ ⑤ $a > -\frac{3}{2}$

해설




그림에서 직선이 그래프와 두점에서 만나는 것은
직선 $y = x+a$ 가 $(2,\ 0)$ 을 지날 때부터 직선이 $y = \sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 접하기 전까지이다.

ⅰ) $y = x+a$ 에 $(2,\ 0)$ 을 대입하면 $a = -2$

ⅱ) $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = x+a$ 가 접하기 위해서는 두 식을 연립한 식의 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$\sqrt{2x-4} = x+a$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2x(a-1) + a^2 + 4 = 0$

$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - a^2 - 4 = 0$

$-2a - 3 > 0$ , $a < -\frac{3}{2}$

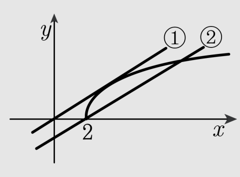
ⅰ) , ⅱ)로 부터 $-2 \le a < -\frac{3}{2}$

**19.** 곡선 $y=\sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 $a$값의 범위를 정하면?

① $-2 \le a < 0$　　② $-1 \le a < 0$　　③ $-2 \le a < -1$

④ $-1 \le a < 1$　　⑤ $0 \le a < 1$

해설




그림처럼 ①,② 사이에 있어야 교점이 두 개다.

① 접할 때

$\frac{1}{2}x+a=\sqrt{2x-4}$

$x^2+4(a-2)x+4a^2+16=0$

$\frac{D}{4}=2^2(a-2)^2-4a^2-16=0, \therefore a=0$

② 점 $(2,0)$ 을 지날 때,

$0=\frac{1}{2}\times 2+a \quad \therefore\ a=-1$

$-1 \le a < 0$