1. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.
다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

두 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ $B = \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6 이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6 으로 되어있다.

2. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 20 이하의 6의 배수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 모든 부분집합의 원소의 합을 구한 것은?

① 122　② 144　③ 166　④ 188　⑤ 210

해설

$A = \{6,\ 12,\ 18\}$ 이므로 부분집합은
$\{6\}, \{12\}, \{18\}, \{6, 12\}, \{6, 18\}, \{12, 18\}, \{6, 12, 18\}$이고 $6,\ 12,\ 18$ 이 4번씩 들어가므로
$(6+12+18)\times 4 = 144$ 이다.

3. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 30보다 작은 4의 배수}\}$, $B = \{4,\ 12,\ a\times 8,\ 16,\ 20,\ b+3,\ c\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$,
$B = \{4,\ 12,\ a\times 8,\ 16,\ 20,\ b+3,\ c\}$ 이므로,
$a\times 8,\ b+3,\ c$ 는 각각 8, 24, 28 중 하나여야 한다.
$a\times 8 = 8$ 일 때 a 값이 최소가 되고,
$a\times 8 = 28$ 일 때 a 값이 최대가 되지만,
$a\times 8 = 28$ 일 때의 a 값은 자연수가 아니므로 될 수 없다.
따라서 a 값이 최대일 때는 $a\times 8 = 24$ 일 때이다.
$\therefore\ a = 3$

4. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ A \subset B$ 를 만족하는 두 집합 $A,\ B$ 의 순서쌍 $(A,\ B)$ 의 개수는?

① 50 개 ② 55 개 ③ 60 개 ④ 65 개 ⑤ 70 개

해설

원소의 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수는 2^n 이다.

i) $n(A) = 1$ 일 때
$A \subset B$ 이므로 $n(B) = 3$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$2^3 \times 4 = 32$
$(\because n(A) = 1$ 의 경우는 4 가지이다)

ii) $n(A) = 2$ 일 때
$n(B) = 2$ 의 부분집합의 개수 $2^2 \times 6 = 24$
$(\because n(A) = 2$ 의 경우는 6 가지이다)

iii) $n(A) = 3$ 일 때
$n(B) = 1$ 의 부분집합의 개수 $2^1 \times 4 = 8$
$(\because n(A) = 3$ 의 경우는 4 가지이다)

iv) $n(A) = 4$ 일 때
$\{1, 2, 3, 4\}$ 의 1 가지가 존재한다.

$\therefore 32 + 24 + 8 + 1 = 65$(개)

5. $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ 이다. $n(A \cap B \cap X) = 1$, $B \cup X = B$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 21 개　② 22 개　③ 23 개　④ 24 개　⑤ 25 개

해설

$A \cap B = \{2,\ 4,\ 6\}$, $B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$,
즉 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 2, 4, 6 중 어느 하나만 원소로 갖는 집합이므로
2, 4, 6 중 2 만을 원소로 가질 때 $2^3 = 8$
4, 6 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지 이므로
집합 X 의 개수는 $8 \times 3 = 24$ (개)

6. $A = \{1,\ 4,\ 7,\ 8,\ 12,\ 15\}$, $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16\}$ 이다.
$n(A \cap B \cap X) = 1$, $A \cup X = A$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 16 개　　② 32 개　　③ 64 개
④ 128 개　　⑤ 256 개

해설

$A \cap B = \{7,\ 12\}$, $A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$,
즉 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 7, 12 중 어느 하나만 원소로 갖는 집합이므로
7, 12 중 7 만을 원소로 가질 때 $2^4 = 16$
12 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지 이므로 $2^4 = 16$ 이다.
따라서 모두 32 개이다.

7. 세 집합 $A = \{x|x\text{는 } 6\text{의 약수}\}$, $B = \{x|x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$, $C = \{x|x\text{는 } 6\text{의 배수}\}$ 에 대하여 4 미만의 자연수를 나타내는 집합을 모두 골라라.

㉠ $A \cap B \cap C$	㉡ $A \cap B - C$	㉢ $A \cap B^c - C$
㉣ $A \cap B \cap C^c$	㉤ $A^c \cap B \cap C$	

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $C = \{6, 12, 18, \cdots\}$

$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ 에서 집합 C 를 빼면 $\{1, 2, 3\}$ 즉 4 미만의 자연수가 남는다.

8. 세 집합 A, B, C 사이에 $A-B=A,\ B-C=B,\ C-A=C$ 이 성립한다. 집합 A, B, C 의 부분집합의 개수의 총합이 44 개일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 10 개

해설

$A-B=A,\ B-C=B,\ C-A=C$ 이면, A, B, C 중 임의의 두 집합 사이의 교집합은 모두 공집합이다.
그러므로 $n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$,
$n(A)=a,\ n(B)=b,\ n(C)=c$ 라고 할 때 $2^a+2^b+2^c=44$,
3 개의 2 의 거듭제곱수의 합이 44 가 되는 경우는 $2^2+2^3+2^5=4+8+32=44$ 의 한 가지 경우뿐이므로 $a+b+c=10$
따라서 $n(A \cup B \cup C)=10$

9. 집합 X, Y 에 대하여 $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$라 하자. 집합 A, B, C가 $n(A \cup B \cup C) = 90$, $n(A \triangle B) = 40$, $n(B \triangle C) = 36$, $n(C \triangle A) = 58$일 때, $n(A \cap B \cap C)$를 구하면?

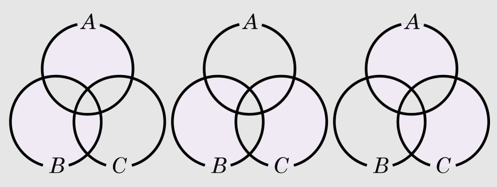
① 15　② 17　③ 21　④ 23　⑤ 25

해설

다음 벤 다이어그램에서 $n(A \triangle B) + n(B \triangle C) + n(C \triangle A) = 2 \times \{n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)\}$

$\therefore\ 40 + 36 + 58 = 2 \times \{90 - n(A \cap B \cap C)\}$

$\therefore\ n(A \cap B \cap C) = 23$



$A \triangle B$　$B \triangle C$　$C \triangle A$

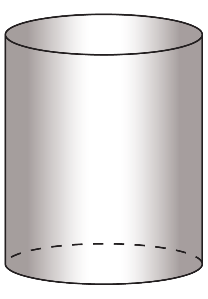
10. p, q 가 실수일 때, 다음 중 부등식 $p < q$ 가 성립할 필요충분조건은?

① $\{x|x \le p\} \cap \{x|x > q\} = \varnothing$
② $\{x|x \ge p\} \cap \{x|x \le q\} \ne \varnothing$
③ $\{x|x < p\} \subset \{x|x < q\}$
④ $\{x|x < p\} \subset \{x|x \le q\}$
⑤ $\{x|x \le p\} \subset \{x|x < q\}$

해설

① $p < q \overset{\text{O}}{\underset{\text{X}}{\rightleftarrows}} \{x|x \le p\} \cap \{x|x > q\} = \varnothing$
(반례) $p = q$ $\therefore$ 충분조건
② $p < q \overset{\text{O}}{\underset{\text{X}}{\rightleftarrows}} \{x|x \ge p\} \cap \{x|x \le q\} \ne \varnothing$
(반례) $p = q$ $\therefore$ 충분조건
③ $p < q \overset{\text{O}}{\underset{\text{X}}{\rightleftarrows}} \{x|x < p\} \subset \{x|x < p\}$
(반례) $p = q$ $\therefore$ 충분조건
④ $p < q \overset{\text{O}}{\underset{\text{X}}{\rightleftarrows}} \{x|x < p\} \subset \{x|x \le q\}$
(반례)$p = q$ $\therefore$ 충분조건
⑤ $p < q \overset{\text{O}}{\underset{\text{O}}{\rightleftarrows}} \{x|x \le p\} \subset \{x|x < q\}$
$\therefore$ 필요충분조건

11. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원　② 104만원　③ 100만원
④ 96만원　⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를
x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S 라 하면
$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$
$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$
$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$
단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$ 일 때,
곧 $x = 2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

12. $x<0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x\cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times 2+$㉡하면

$3f(x)=\frac{2}{x}+x=\frac{x^2+2}{x}$

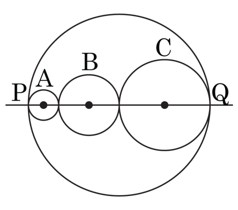
$\therefore f(x)=\frac{x^2+2}{3x}=\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}$

$x<0$이므로

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}\le -2\sqrt{\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

13. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$ ④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면
구의 겉넓이는
$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$
$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$이므로 $8\sqrt{35}$

14. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$ 로 정의 한다.
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 ?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 이므로
$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.
즉, $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$
이 식에 $x = 4$ 를 대입하면
$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$\therefore f(4) = 24$

15. 함수 $f(x) = |x+1| - 2$ 에서 $f(x) = (f \circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2　　② -1　　③ $-\frac{3}{2}$　　④ 1　　⑤ 0

해설

$f(x) = |x+1| - 2$ 에서

$f(f(x)) = f(|x+1|-2) = ||x+1| - 2 + 1| - 2$

$= ||x+1| - 1| - 2$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $f(f(x)) = x - 2$

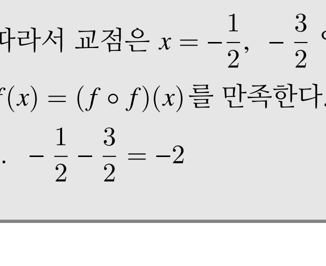
(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 2$

(iii) $-2 \leq x < -1$ 일 때, $f(f(x)) = x$

(iv) $x < -2$ 일 때, $f(f(x)) = -x - 4$

(i), (ii) 의 경우 $f(x) = x - 1$

(iii), (iv) 의 경우 $f(x) = -x - 3$



따라서 교점은 $x = -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x) = (f \circ f)(x)$를 만족한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$

16. 두 함수 $f(x)=-x+5$, $g(x)=4x-1$ 에 대하여 $(f\circ h\circ g)(x)=2x-\frac{3}{2}$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=-\frac{1}{2}x+6$　② $h(x)=-\frac{1}{2}x+3$
③ $h(x)=-\frac{1}{2}x+2$　④ $h(x)=\frac{1}{2}x+5$
⑤ $h(x)=\frac{1}{2}x+8$

해설

$f(x)=-x+5$ 에서 $f^{-1}(x)=-x+5$ 이므로

$(f\circ h\circ g)(x)=2x-\frac{3}{2}$ 에서

$f(h(g(x)))=2x-\frac{3}{2}$ 이므로

$$h(g(x))=f^{-1}\left(2x-\frac{3}{2}\right)$$
$$=-\left(2x-\frac{3}{2}\right)+5$$
$$=-2x+\frac{13}{2}$$

$\therefore\ h(4x-1)=-2x+\frac{13}{2}\cdots$ ㉠

㉠에서 $4x-1=t$ 라 하면 $x=\frac{t+1}{4}$ 이므로

$h(t)=-2\left(\frac{t+1}{4}\right)+\frac{13}{2}=-\frac{1}{2}t+6$ 이다.

따라서 $h(x)=-\frac{1}{2}x+6$

17. 함수 $y = ||x| - |x-2||$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M + m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

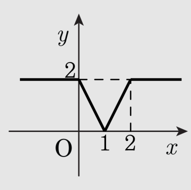
$y = ||x| - |x-2||$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |-x + x - 2| = 2$

(ii) $0 \le x < 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |x + x - 2| = 2|x-1|$

(iii) $x \ge 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = x-2$ 이므로 $y = |x - x + 2| = 2$

(i), (ii), (iii) 로부터 $y = ||x| - |x-2||$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 최댓값은 2 , 최솟값은 0 이므로 $M = 2$, $m = 0$ $\therefore M + m = 2$

18. 양수 a의 소수 부분을 b라 할 때, $a^2+b^2=8$을 만족하는 a의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$
④ $1-\sqrt{3}$　⑤ $3+2\sqrt{3}$

해설

(i) a가 정수일 때,
$b=0,\ a^2=8\ a=2\sqrt{2}$ (모순)
(ii) $a>0$, 정수가 아닐 때 $b\neq 0$
a의 정수부분을 k라 하면
$a=k+b\ (0<b<1)$이라 하면
$a^2+b^2=8$에서 $b^2=8-a^2$
$0<8-a^2<1,\ \sqrt{7}<a<\sqrt{8}$
$\therefore k=2 \quad \therefore\ b=a-2$
$a^2+(a-2)^2=2a^2-4a+4=8$
$a^2-2a-2=0,\ a=1\pm\sqrt{3}$
$\therefore\ a=1+\sqrt{3}(\because a>0)$

19. $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$일 때, $x^3 + 3x$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$로 놓으면
$x = a - b$

$$\begin{aligned} x^3 &= (a-b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \\ &= (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) \\ &\quad - 3 \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \cdot x \\ &= 2 - 3x \end{aligned}$$

따라서, $x^3 + 3x = 2$