1. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.
다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

> 두 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ $B = \{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6 이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6 으로 되어있다.

2. 집합 $A = \{x \mid x$는 20 이하의 6의 배수$\}$ 에 대하여 집합 A 의 모든 부분집합의 원소의 합을 구한 것은?

① 122 ② 144 ③ 166 ④ 188 ⑤ 210

해설

$A = \{6,\ 12,\ 18\}$ 이므로 부분집합은

$\{6\}$, $\{12\}$, $\{18\}$, $\{6,\ 12\}$, $\{6,\ 18\}$, $\{12,\ 18\}$, $\{6,\ 12,\ 18\}$이고 6, 12, 18 이 4번씩 들어가므로

$(6+12+18)\times 4 = 144$ 이다.

3. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 30\text{보다 작은 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{4,\ 12,\ a \times 8,\ 16,\ 20,\ b+3,\ c\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$,

$B = \{4,\ 12,\ a \times 8,\ 16,\ 20,\ b+3,\ c\}$ 이므로,

$a \times 8,\ b+3,\ c$ 는 각각 8, 24, 28 중 하나여야 한다.

$a \times 8 = 8$ 일 때 a 값이 최소가 되고,

$a \times 8 = 28$ 일 때 a 값이 최대가 되지만,

$a \times 8 = 28$ 일 때의 a 값은 자연수가 아니므로 될 수 없다.

따라서 a 값이 최대일 때는 $a \times 8 = 24$ 일 때이다.

$\therefore\ a = 3$

4. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ A \subset B$ 를 만족하는 두 집합 $A,\ B$ 의 순서쌍 $(A,\ B)$ 의 개수는?

① 50 개 ② 55 개 ③ 60 개 ④ 65 개 ⑤ 70 개

해설

원소의 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수는 2^n 이다.

i) $n(A)=1$ 일 때

$A \subset B$ 이므로 $n(B)=3$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$2^3 \times 4 = 32$

$(\because n(A)=1$ 의 경우는 4가지이다$)$

ii) $n(A)=2$ 일 때

$n(B)=2$ 의 부분집합의 개수 $2^2 \times 6 = 24$

$(\because n(A)=2$ 의 경우는 6가지이다$)$

iii) $n(A)=3$ 일 때

$n(B)=1$ 의 부분집합의 개수 $2^1 \times 4 = 8$

$(\because n(A)=3$ 의 경우는 4가지이다$)$

iv) $n(A)=4$ 일 때

$\{1, 2, 3, 4\}$ 의 1가지가 존재한다.

$\therefore 32+24+8+1=65$(개)

5. $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ 이다. $n(A\cap B\cap X)=1$, $B\cup X=B$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 21 개 ② 22 개 ③ 23 개 ④ 24 개 ⑤ 25 개

해설

$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B\cup X=B$ 에서 $X\subset B$,
즉 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 2, 4, 6 중 어느 하나만 원소로 갖는 집합이므로
2, 4, 6 중 2 만을 원소로 가질 때 $2^3=8$
4, 6 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지 이므로
집합 X 의 개수는 $8\times 3=24$ (개)

6. $A=\{1,\ 4,\ 7,\ 8,\ 12,\ 15\}$, $B=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16\}$ 이다. $n(A\cap B\cap X)=1$, $A\cup X=A$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 16 개 ② 32 개 ③ 64 개

④ 128 개 ⑤ 256 개

해설

$A\cap B=\{7,\ 12\}$, $A\cup X=A$ 에서 $X\subset A$,
즉 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 7, 12 중 어느 하나만 원소로 갖는 집합이므로
7, 12 중 7 만을 원소로 가질 때 $2^4=16$
12 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지 이므로 $2^4=16$ 이다.
따라서 모두 32 개이다.

7. 세 집합 $A = \{x|x$는 6의 약수$\}$, $B = \{x|x$는 12의 약수$\}$, $C = \{x|x$는 6의 배수$\}$에 대하여 4 미만의 자연수를 나타내는 집합을 모두 골라라.

㉠ $A \cap B \cap C$	㉡ $A \cap B - C$	㉢ $A \cap B^c - C$
㉣ $A \cap B \cap C^c$	㉤ $A^c \cap B \cap C$	

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $C = \{6,\ 12,\ 18, \cdots\}$

$A \cap B = \{1, 2,\ 3,\ 6\}$ 에서 집합 C 를 빼면 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 즉 4 미만의 자연수가 남는다.

8. 세 집합 A, B, C 사이에 $A-B=A,\ B-C=B,\ C-A=C$ 이 성립한다. 집합 A, B, C 의 부분집합의 개수의 총합이 44 개일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 10 개

해설

$A-B=A,\ B-C=B,\ C-A=C$ 이면, A, B, C 중 임의의 두 집합 사이의 교집합은 모두 공집합이다.
그러므로 $n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$,
$n(A)=a,\ n(B)=b,\ n(C)=c$ 라고 할 때 $2^a+2^b+2^c=44$,
3 개의 2 의 거듭제곱수의 합이 44 가 되는 경우는 $2^2+2^3+2^5=4+8+32=44$ 의 한 가지 경우뿐이므로 $a+b+c=10$
따라서 $n(A \cup B \cup C)=10$

9. 집합 X, Y 에 대하여 $X \triangle Y = (X-Y) \cup (Y-X)$ 라 하자. 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 90$, $n(A \triangle B) = 40$, $n(B \triangle C) = 36$, $n(C \triangle A) = 58$ 일 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하면?

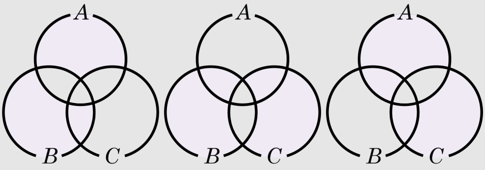
① 15 ② 17 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

해설

다음 벤 다이어그램에서 $n(A \triangle B) + n(B \triangle C) + n(C \triangle A) = 2 \times \{n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B \cap C)\}$

$\therefore\ 40 + 36 + 58 = 2 \times \{90 - n(A \cap B \cap C)\}$

$\therefore\ n(A \cap B \cap C) = 23$



$A \triangle B$ $B \triangle C$ $C \triangle A$

10. $p,\ q$ 가 실수일 때, 다음 중 부등식 $p < q$ 가 성립할 필요충분조건은?

① $\{x|x \le p\} \cap \{x|x > q\} = \varnothing$　　② $\{x|x \ge p\} \cap \{x|x \le q\} \ne \varnothing$

③ $\{x|x < p\} \subset \{x|x < q\}$　　④ $\{x|x < p\} \subset \{x|x \le q\}$

⑤ $\{x|x \le p\} \subset \{x|x < q\}$

해설

① $p < q$ $\underset{\text{X}}{\overset{\text{O}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x \le p\} \cap \{x|x > q\} = \varnothing$

(반례) $p = q$ ∴ 충분조건

② $p < q$ $\underset{\text{X}}{\overset{\text{O}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x \ge p\} \cap \{x|x \le q\} \ne \varnothing$

(반례) $p = q$ ∴ 충분조건

③ $p < q$ $\underset{\text{X}}{\overset{\text{O}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x < p\} \subset \{x|x < p\}$

(반례) $p = q$ ∴ 충분조건

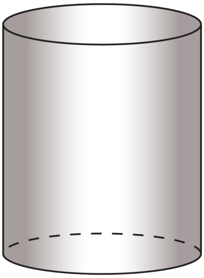
④ $p < q$ $\underset{\text{X}}{\overset{\text{O}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x < p\} \subset \{x|x \le q\}$

(반례)$p = q$ ∴ 충분조건

⑤ $p < q$ $\underset{\text{O}}{\overset{\text{O}}{\rightleftarrows}}$ $\{x|x \le p\} \subset \{x|x < q\}$

∴ 필요충분조건

11. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$ 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원

④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를

x, 높이를 y라 하면,

부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠

철판의 넓이를 S 라 하면

$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$

$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$

$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$

단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$ 일 때,

곧 $x = 2$일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

12. $x<0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x\cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2+$ ㉡하면

$3f(x)=\frac{2}{x}+x=\frac{x^2+2}{x}$

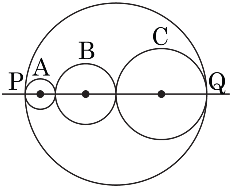
$\therefore f(x)=\frac{x^2+2}{3x}=\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}$

$x<0$이므로

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}\leq -2\sqrt{\frac{x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

13. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면

구의 겉넓이는

$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$

$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$

$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$

$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$

$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$이므로 $8\sqrt{35}$

14. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$ 로 정의 한다.

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 이므로

$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.

즉, $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$

이 식에 $x = 4$ 를 대입하면

$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\therefore f(4) = 24$

15. 함수 $f(x)=|x+1|-2$ 에서 $f(x)=(f\circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ 0

해설

$f(x)=|x+1|-2$ 에서

$f(f(x))=f(|x+1|-2)=||x+1|-2+1|-2$

$=||x+1|-1|-2$

(i) $x\geq 0$ 일 때, $f(f(x))=x-2$

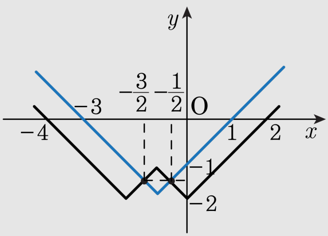
(ii) $-1\leq x<0$ 일 때, $f(f(x))=-x-2$

(iii) $-2\leq x<-1$ 일 때, $f(f(x))=x$

(iv) $x<-2$ 일 때, $f(f(x))=-x-4$

(i), (ii) 의 경우 $f(x)=x-1$

(iii), (iv) 의 경우 $f(x)=-x-3$



따라서 교점은 $x=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x)=(f\circ f)(x)$를 만족한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$

16. 두 함수 $f(x)=-x+5$, $g(x)=4x-1$ 에 대하여 $(f\circ h\circ g)(x)=2x-\frac{3}{2}$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=-\frac{1}{2}x+6$
② $h(x)=-\frac{1}{2}x+3$
③ $h(x)=-\frac{1}{2}x+2$
④ $h(x)=\frac{1}{2}x+5$
⑤ $h(x)=\frac{1}{2}x+8$

해설

$f(x)=-x+5$ 에서 $f^{-1}(x)=-x+5$ 이므로

$(f\circ h\circ g)(x)=2x-\frac{3}{2}$ 에서

$f(h(g(x)))=2x-\frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= f^{-1}\left(2x-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\left(2x-\frac{3}{2}\right)+5 \\ &= -2x+\frac{13}{2} \end{aligned}$$

$\therefore\ h(4x-1)=-2x+\frac{13}{2}\cdots$ ㉠

㉠에서 $4x-1=t$ 라 하면 $x=\frac{t+1}{4}$ 이므로

$h(t)=-2\left(\frac{t+1}{4}\right)+\frac{13}{2}=-\frac{1}{2}t+6$ 이다.

따라서 $h(x)=-\frac{1}{2}x+6$

17. 함수 $y = ||x| - |x-2||$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M+m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

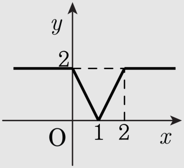
$y = ||x| - |x-2||$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |-x+x-2| = 2$

(ii) $0 \le x < 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = |x+x-2| = 2|x-1|$

(iii) $x \ge 2$ 일 때, $|x| = x$, $|x-2| = x-2$ 이므로 $y = |x-x+2| = 2$

(i), (ii), (iii) 로부터 $y = ||x| - |x-2||$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 최댓값은 2 , 최솟값은 0 이므로 $M = 2$, $m = 0$ $\therefore$ $M + m = 2$

18. 양수 a의 소수 부분을 b라 할 때, $a^2+b^2=8$을 만족하는 a의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$

④ $1-\sqrt{3}$ ⑤ $3+2\sqrt{3}$

해설

(i) a가 정수일 때,

$b=0,\ a^2=8\ a=2\sqrt{2}$ (모순)

(ii) $a>0$, 정수가 아닐 때 $b \neq 0$

a의 정수부분을 k라 하면

$a=k+b\ (0<b<1)$이라 하면

$a^2+b^2=8$에서 $b^2=8-a^2$

$0<8-a^2<1,\ \sqrt{7}<a<\sqrt{8}$

$\therefore k=2 \qquad \therefore\ b=a-2$

$a^2+(a-2)^2=2a^2-4a+4=8$

$a^2-2a-2=0,\ a=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1+\sqrt{3}(\because a>0)$

19. $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ 일 때, x^3+3x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1},\ b=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ 로 놓으면
$x=a-b$

$$\begin{aligned} x^3 &= (a-b)^3 \\ &= a^3-b^3-3ab(a-b) \\ &= (\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1) \\ &\quad -3\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\cdot x \\ &= 2-3x \end{aligned}$$

따라서, $x^3+3x=2$