

1. 다음 보기에서 해가 없는 이차방정식을 모두 골라라. (단, 완전제곱식을 이용하여라.)

보기

$$\text{㉠ } x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\text{㉡ } x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\text{㉢ } \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\text{㉣ } \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} = 0$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉠

▶ 정답: ㉣

해설

$$\text{㉠ } x^2 - 3x = -5$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -5 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$$

따라서 제곱한 수는 음수가 될 수 없으므로 해가 없다.

$$\text{㉡ } x^2 + 4x = -2$$

$$x^2 + 4x + 4 = -2 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 2$$

$$\text{㉢ } \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 0 \text{ 에서 양변에 2 를 곱하면 } x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{3}{2} + \frac{4}{9}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{35}{18}$$

$$\text{㉣ } \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} = 0 \text{ 에서 양변에 3 을 곱하면 } x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{3}{16}$$

따라서 제곱한 수는 음수가 될 수 없으므로 해가 없다.

2. 이차방정식 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 을 $(x - a)^2 = b$ 의 꼴로 변형할 때, a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = \frac{3}{2}$ 또는 1.5

▷ 정답: $b = \frac{17}{4}$ 또는 4.25

해설

$$x^2 - 3x = 2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{17}{4}$$

3. 이차방정식 $x^2 + 6x + 7 = 0$ 을 $(x + a)^2 = b$ 꼴로 고칠 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 2$$

$$(x + a)^2 = b$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

4. $a^2 + a + 1 = 0$ 일 때, $a^{11} + \frac{1}{a^{11}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a^2 + a + 1 = 0$ 의 양변을 a ($a \neq 0$) 로 나누면

$$a + 1 + \frac{1}{a} = 0$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = -1$$

$a^2 + a + 1 = 0$ 의 양변에 $a - 1$ 을 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0$$

$$\therefore a^3 - 1 = 0, a^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore a^{11} + \frac{1}{a^{11}} &= (a^3)^3 \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^3 \cdot a^2} \\ &= a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \\ &= (-1)^2 - 2 = -1 \end{aligned}$$

5. 0 보다 큰 실수 a, b 에 대하여 $(a-1)^2 = (b+1)^2 = 2$ 일 때, $a^8 - b^8$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $816\sqrt{2}$

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로
 $(a-1)^2 = 2$ 에서 $a = \sqrt{2} + 1$
 $(b+1)^2 = 2$ 에서 $b = \sqrt{2} - 1$
따라서 $a+b = 2\sqrt{2}, a-b = 2, ab = 1$ 이므로
 $a^2 + b^2 = 8 - 2 = 6$
 $a^4 + b^4 = 36 - 2 = 34$
 $\therefore a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$
 $= 34 \times 6 \times 2\sqrt{2} \times 2 = 816\sqrt{2}$

6. $0 < n < 1$ 인 n 에 대하여 $x = n + \frac{1}{n}$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 4}$ 를 n 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{n} - n$

해설

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 4} = \sqrt{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$0 < n < 1 \text{ 이므로 } n - \frac{1}{n} < 0$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{n} - n$$

7. $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0(m)$ 을
 $a_n \times m^n + a_{n-1} \times m^{n-1} + \cdots + a_1 \times m + a_0 \times 1$ 이라고 할 때, $11(m)$ 에 3
배를 하여 3을 더하면 $120(m)$ 이 된다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$11(m) = 1 \times m + 1$ 이므로
 $11(m)$ 에 3 배를 하여 3을 더하면
 $3(m+1) + 3 = 3m + 6$
또한, $120(m) = 1 \times m^2 + 2 \times m + 0 \times 1 = m^2 + 2m$
따라서 $m^2 + 2m = 3m + 6$
 $m^2 - m - 6 = 0$
 $(m+2)(m-3) = 0$
이므로 $m = 3$ ($\because m > 0$) 이다.

8. $[f(x)]_b^a = f(a) - f(b)$ 라고 할 때, $[x^2 - 5x]_1^a = 0$ 을 만족하는 a 의 값을 구하여라. (단, $a > 1$)

▶ 답:

▷ 정답: $a = 4$

해설

$$\begin{aligned} [x^2 - 5x]_1^a &= 0 \\ (a^2 - 5a) - (1 - 5) &= 0 \\ a^2 - 5a + 4 &= 0 \\ (a - 1)(a - 4) &= 0 \\ \therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 4 \\ \therefore a = 4 \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

9. $x > 0$ 일 때, 이차방정식 $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 14 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{4}{7}$

해설

$\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} - 14 = 0$ 에서 $\frac{1}{x} = A$ 라 하면

$$4A^2 + A - 14 = 0$$

$$(A + 2)(4A - 7) = 0$$

$$A = \frac{7}{4} \left(\because \frac{1}{x} > 0 \right)$$

$$\therefore x = \frac{4}{7}$$

10. 다음 식의 값을 구하여라.

$$5 - \frac{6}{5 - \frac{6}{5 - \frac{6}{5 - \dots}}}$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 2$

▷ 정답: $x = 3$

해설

주어진 식을 x 라고 하면 $x = 5 - \frac{6}{x}$

$x = 5 - \frac{6}{x}$ 의 양변에 x 를 곱하면

$$x^2 = 5x - 6, \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

11. 다음 식의 값을 구하여라.

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 식을 x 라 하면
 $x = 2 + \sqrt{x}$, $\sqrt{x} > 0$ 이므로 $x > 2$
 $x - 2 = \sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 4x + 4 = x$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x - 1)(x - 4) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 4$
 $\therefore x > 2$ 이므로 $x = 4$

12. 다음 식의 값을 구하여라.

$$6 - \frac{3}{6 - \frac{3}{6 - \frac{3}{6 - \dots}}}$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $3 + \sqrt{6}$

▷ 정답: $3 - \sqrt{6}$

해설

주어진 식을 x 라고 하면 $x = 6 - \frac{3}{x}$

$x = 6 - \frac{3}{x}$ 의 양변에 x 를 곱하면

$$x^2 = 6x - 3, \quad x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 6$$

$$\therefore x = 3 \pm \sqrt{6}$$