1. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 소수를 n 개 포함하는 집합의 개수를 x_n 이라 할 때, $x_1 + x_2 + x_3$ 의 값을 구하면?

① 26　② 27　③ 28　④ 29　⑤ 30

해설

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 소수는 $2, 3, 5$
소수 1 개 포함하는 부분집합 : $2^2 \times 3 = 12$
소수 2 개 포함하는 부분집합 : $2^2 \times 3 = 12$
소수 3 개 포함하는 부분집합 : $2^2 = 4$
$\therefore\ x_1 + x_2 + x_3 = 28$

해설

구하는 것은 적어도 소수 1 개를 원소로 하는 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^5 - 2^2 = 28$

2. 집합 $S = \left\{x \mid x\text{는 자연수}\right\}$ 의 부분집합 $A = \left\{x \mid x \in A\text{이면 } 5 - x \in A\right\}$ 가 있다. 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

자연수 전체집합의 부분집합인 A 가

$A = \left\{x \mid x \in A\text{이면 } 5 - x \in A\right\}$ 라는 조건을 가질 때,

집합 A 의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4 이다.

조건을 이용하면 1 과 4 , 2 와 3 은 반드시 동시에 원소가 되어야 하므로

집합 A 는 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 3 개의 경우가 가능하다.

3. 집합 $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_N\}$ 에 대하여 $[P] = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_N$ 이라 정의한다. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_8$ 이라 할 때, $[A_1] \times [A_2] \times [A_3] \times \cdots \times [A_8]$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1296

해설

$A = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합이 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_8$ 일 때,
집합 A 의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{3-1} = 4$ (번) 씩 나온다.
따라서 $[A_1] \times [A_2] \times [A_3] \times \cdots \times [A_8] = 1^4 \times 2^4 \times 3^4 = 1296$

4. 유리수 전체의 집합을 Q라 하고, 자연수 $n(n \geqq 2)$ 에 대하여 집합 A_n 을 $A_n = \left\{ x \,\middle|\, x - [x] = \frac{1}{n},\ x \in Q \right\}$ 로 정의할 때, 다음 중에서 옳은 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다.)

① $-\frac{4}{3} \in A_3$　　② $A_2 \subset A_4$

③ $A_4 \subset A_2$　　④ $A_2 \cap A_3 = \varnothing$

⑤ $A_5 = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \cdots, \frac{51}{5} \right\}$

해설

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타내므로 간단하게 정수라고 생각하면 되고, $x - [x]$ 는 x 의 소수 부분이다. 따라서 구하고자 하는 집합 A_n 의 원소 x 는 $x = [x] + \frac{1}{n}$ 이다.

$[x]$가 정수이므로 집합 A_n 은

$A_n = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{n},\ -1+\frac{1}{n},\ 0+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ 2+\frac{1}{n}, \cdots \right\}$ 이 되고,

n 대신에 2, 3, 4, 5, $\cdots$ 를 각각 대입해서 A_2, A_3, A_4, A_5, $\cdots$ 를 구해 보면

$$A_2 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{2},\ -1+\frac{1}{2},\ 0+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2}, \cdots \right\}$$
$$= \left\{ \cdots, -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}, \cdots \right\}$$
$$A_3 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{3},\ -1+\frac{1}{3},\ 0+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{3}, \cdots \right\}$$
$$= \left\{ \cdots, -\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3}, \cdots \right\}$$
$$A_4 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{4},\ -1+\frac{1}{4},\ 0+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4},\ 2+\frac{1}{4}, \cdots \right\}$$
$$= \left\{ \cdots, -\frac{7}{4},\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{9}{4}, \cdots \right\}$$
$$A_5 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{5},\ -1+\frac{1}{5},\ 0+\frac{1}{5},\ 1+\frac{1}{5},\ 2+\frac{1}{5}, \cdots \right\}$$
$$= \left\{ \cdots, -\frac{9}{5},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{11}{5}, \cdots \right\}$$

이므로 $A_2 \cap A_3 = \varnothing$ 임을 알 수 있다.

5. 전체집합 U 의 부분집합인 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 9 개, 10 개, 11 개이다. $(A-B) \cup (B^c \cup C)^c = \varnothing$ 일 때, $n(B \cap C) - n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(A-B) \cup (B^c \cup C)^c = \varnothing$ 이므로

$A - B = \varnothing \rightarrow A \subset B$

$(B^c \cup C)^c = \varnothing \rightarrow B - C = \varnothing \rightarrow B \subset C$

$\therefore n(B \cap C) - n(A \cup B) = n(B) - n(B) = 0$

6. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 $X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 라고 정의한다.
전체집합
$U = \{x|x \le 60,\ x\text{는 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x\text{는 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x\text{는 } 6\text{의 배수}\}$, $C = \{x|x\text{는 } 8\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

$X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c = (X \cup Y) - (X \cap Y)$
,
$A = \{x|x\text{는}4\text{의 배수}\}$
$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48,$
$52, 56, 60\},$

$B = \{x|x\text{는}6\text{의 배수}\}$
$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\}$,

$C = \{x|x\text{는}8\text{의 배수}\}$
$= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$,

$(A \bullet B) \bullet C$
$= \{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44, 52, 54,$
$56\} \bullet C$
$= \{4, 6, 18, 20, 24, 28, 30, 42, 44, 52, 54\}$
$\therefore (A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값$= 54$

7. 다음 빈 칸에 ‘공, 유한, 무한’ 중 하나를 골라 알맞게 써넣어라.

> • 무한집합인 전체집합 U 의 부분집합 A 에 대하여 $n(A^c) = 0$ 이면 집합 A 는 $\boxed{}$ 집합이다.
> • A 는 유한집합, B 는 무한집합일 때, $A \cap B$ 는 $\boxed{}$ 집합, $B - A$ 는 $\boxed{}$ 집합, $A \cup B$ 는 $\boxed{}$ 집합이다.
> • $A \cap B = A$, $A \cup B = A$ 일 때, $A - B$ 는 $\boxed{}$ 집합이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 무한

▷ 정답 : 유한

▷ 정답 : 무한

▷ 정답 : 무한

▷ 정답 : 공

해설

• $n(A^c) = 0$ 이면 A^c 는 공집합, A 는 전체집합이다. 전체집합이 무한집합이므로 집합 A 는 무한집합이다.
• 유한집합과 무한집합의 교집합은 유한집합이고, 합집합은 무한집합이다. 또 무한집합에 대한 유한집합의 차집합은 무한집합이다.
• $A \cap B = A$, $A \cup B = A$ 라면 $A = B$ 이므로, $A - B$ 는 공집합이다.

8. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $(A \cup B)^c = A \cap B^c = \varnothing$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① B 는 유한집합이다.

② B 는 무한집합이다.

③ A 가 무한집합이면 B 는 유한집합이다.

④ A 가 유한집합이면 B 는 유한집합이다.

⑤ A , B 모두 무한집합이 아니다.

해설

① A 가 유한집합이면, $(A \cup B)^c = \varnothing$ 가 되려면 $A \cup B = U$ 이므로 B 는 무한집합이어야 한다.
② A 가 무한집합이면, $A \cap B^c = \varnothing$ 가 되려면 $A - B = \varnothing$, $A \subset B$ 이므로 B 도 무한집합이어야 한다. 따라서 B 는 항상 무한집합이다.

9. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

> (ⅰ) A 형인 사람은 B 형이 아니다.
> (ⅱ) C 형이 아닌 사람은 B 형이 아니다.
> (ⅲ) C 형인 사람은 D 형이 아니다.
> (ⅳ) E 형인 사람은 B 형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

> ㉠ A 형인 사람은 E 형이 아니다.
>
> ㉡ E 형인 사람은 C 형이 아니다.
>
> ㉢ E 형이면서도 D 형인 사람이 있다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ) 를 명제로 표현하면
$A \Rightarrow \sim B$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $C \Rightarrow \sim D$, $E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면
(ⅰ) 의 대우 : B형이면 A형이 아니다.
즉, $B \Rightarrow \sim A$
(ⅱ) 의 대우 : B형이면 C형이다.
즉, $B \Rightarrow C$
(ⅲ) 의 대우 : D형이면 C형이 아니다.
즉, $D \Rightarrow \sim C$
(ⅳ) 의 대우 : B형이 아니면 E형이 아니다.
즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$
$E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,
즉, $A \Rightarrow \sim E$
$\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,
즉, $E \Rightarrow C$
$D \Rightarrow \sim C$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$
따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

10. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, a, b, c 는 실수)

㉠ a, b, c 중 적어도 하나는 1보다 크다.
㉡ a, b, c 의 최댓값이 1보다 크다.
㉢ a, b, c 의 최솟값이 1보다 크다.

① 필요, 충분, 필요충분
② 충분, 필요충분, 충분
③ 필요, 필요충분, 충분
④ 충분, 필요, 필요충분
⑤ 필요, 필요, 충분

해설

㉠ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면, $a-1$, $b-1$, $c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이 므로 필요조건 역으로 $a=2$, $b=2$, $c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아 니다.
$\therefore$ 필요조건
㉡ $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이면 a, b, c 중 하나 또는 셋이 1 보다 크므로 최댓값은 1 보다 크다. 역으로 $a=2$, $b=2$, $c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1) < 0$ 이므로 충분조건은 아니다.
$\therefore$ 필요조건
㉢ a, b, c 의 최솟값이 1 보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ 이므로 충분조건 역으로 $a=2$, $b=0$, $c=0$ 이면 최솟값은 0 이 므로 필요조건은 아니다.
$\therefore$ 충분조건

11. 다음의 Ⅰ, Ⅱ에서 p가 q이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

> Ⅰ. p : $ab < 0$
> q :두 부등식 $a > b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$이 동시에 성립한다.
>
> Ⅱ. p : $a + b - 1 < 0$
> q: 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖는다.

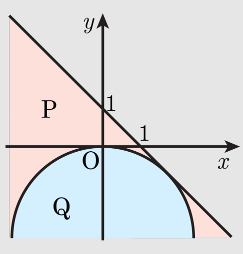
a, b가 실수일 때, Ⅰ, Ⅱ에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

Ⅰ. q의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는



$a - b > 0$이고 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$에서 $ab < 0$이고

$a > b$이므로

$a > 0$, $b < 0$

역으로, $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이고

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0$, $b < 0$이다.

그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0,\ b > 0)$또는 $(a > 0,\ b < 0)$이므로

p는 q이기 위한 필요조건이다.

Ⅱ. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은

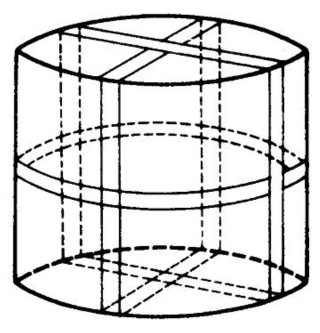
$D = a^2 + 4b < 0$, $P = \{(a,\ b) | a + b - 1 < 0\}$

$\mathrm{Q} = \{(a,\ b) | a^2 + 4b < 0\}$라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다. 즉, $\mathrm{Q} \subset \mathrm{P}$

따라서, p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.

12. 길이가 60 cm 인 장식용 테이프를 가지고 원기둥 모양의 선물을 장식하려 한다. 테이프를 3 개로 잘라 아래의 그림과 같이 선물의 표면에 붙여서 장식할 때, 다음은 이 테이프로 장식할 수 있는 선물의 최대 부피를 구하는 과정이다. 그런데 아래 풀이 과정은 잘못되었다. 어디에서 잘못이 일어났는가?



선물의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h라 하면 $2 \times 2(2r+h)+2\pi r=60 \cdots$ ㉠ 한편, (산술평균) $\geq$ (기하평균) 이므로 $\cdots$ ㉡ $8r+4h+2\pi r \geq 3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r} \cdots$ ㉢ 즉, $60 \geq 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot^3 \sqrt{\pi r^2 h}$ 따라서, $\pi r^2 h \leq 125 \cdots$ ㉣ 이상에 의해, 구하려는 최대 부피는 125 cm^3 이다. $\cdots$ ㉤

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$8r+4h+2\pi r\ 3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r}$ 에서
등호는 $8r=4h=2\pi r$ 일 때 성립한다.
그런데 $8 \neq 2\pi$ 이므로 최대 부피는 125 cm^3 가 아니다.

13. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균) 을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3 \times$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이고,
등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

해설

(산술평균)≥(기하평균) 을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$, $ab+bc+ca \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로 $(1+a)^3=8$에서
$a=b=c=1$

14. x의 삼차방정식 $x^3-ax^2+bx-27=0$이 세 개의 양의 실근을 갖는다. 이 때, 실수 a, b에 대하여 a의 최소값과 b의 최소값의 차는?

① 6 ② 12 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=a$,

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=27$

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$a=\alpha+\beta+\gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

$=3\sqrt[3]{27}=9$

$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \geq 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=27$

$\therefore\ 27-9=18$

15. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수 f 를

$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (n\text{이 2의 배수일 때})\\ n+1 & (n\text{이 2의 배수가 아닐 때})\end{cases}$ 로 정의하자.

$f=f^1,\ f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3,\ \cdots,\ f\circ f^n=f^{n+1}$ 으로 나타낼 때, $f^k(10)=2$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f^k(10)$ 에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면
$f(10)=5$
$f^2(10)=f(f(10))=f(5)=6$
$f^3(10)=f(f^2(10))=f(6)=3$
$f^4(10)=f(f^3(10))=f(3)=4$
$f^5(10)=f(f^4(10))=f(4)=2$
따라서 k 의 최솟값은 5 이다.

16. 자연수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x) = \begin{cases} x+1 \ (x\text{는 홀수}) \\ \dfrac{x}{2}(x\text{는 짝수}) \end{cases}$ 로 정의할 때, $f(f(x)) = 2$ 를 만족시키는 x의 값들의 합은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$에서 $f(x) = a$로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a가 홀수일 때 $f(a) = a+1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a가 짝수일 때 $f(a) = \dfrac{a}{2} = 2 \ \therefore a = 4$

i), ii) 에서 $f(x) = 1 \ or \ f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$일 때 x가 홀수이면 존재하지 않고

x가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$일 때 x가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, \ 3, \ 8$

$\therefore 2+3+8 = 13$

17. 집합 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A\cup B=S$, $A\cap B=\{5\}$ 일 때, 함수 $f: A\to B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답: 36 개

해설

함수 $f: A\Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.
$A\cup B=S$, $A\cap B=\{5\}$ 을 만족하고
함수 f 가 일대일 대응이므로
두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서
1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A=\{1,2,5\}$, $B=\{3,4,5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6\times 6=36$

18. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 다음 중 함수 $f(2x)$ 의 역함수는?

① $g(2x)$　② $g\left(\frac{1}{2}x\right)$　③ $\frac{1}{2}g(x)$

④ $\frac{1}{2}g(2x)$　⑤ $2g\left(\frac{1}{2}x\right)$

해설

$h(x) = 2x$ 라고 하면

$f(2x) = f(h(x)) = (f \circ h)(x)$

한편, $(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}$ 이고,

$f^{-1}(x) = g(x),\ h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ h)^{-1}(x) &= \left(h^{-1} \circ f^{-1}\right)(x) \\ &= h^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= h^{-1}(g(x)) \\ &= \frac{1}{2}g(x)\end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}(2x) = (f \circ h)^{-1}(x) = \frac{1}{2}g(x)$

19. $f(x,\ y,\ z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ 라 한다. $f(y,\ x,\ z) + f(z,\ x,\ y) = -3$ 이고 $x + y + z \neq 0$ 일 때, $xy + yz + zx$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

(준식)

$= \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$

$= \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} - 1 - 1 - 1 = (x + y +$

$z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$

(준식)$= -3$ 에서 $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0$

$\therefore (x+y+z) \times \frac{xy+yz+zx}{xyz} = 0$ 에서

$x + y + z \neq 0$ 이므로 $xy + yz + zx = 0$

20. 0이 아닌 세 수 x, y, z가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하시오.

> ㉠ x, y, z 중 적어도 하나는 6이다.
> ㉡ x, y, z의 각각의 역수의 합은 $\frac{1}{6}$이다.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

㉠에서 $(x-6)(y-6)(z-6)=0\cdots$①

㉡에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore 6(xy+yz+zx)=xyz$

①에서 $xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0$

$\therefore 36(x+y+z)=216$

따라서, $2(x+y+z)=12$

21. 수도꼭지 A, B, C 세 개가 달려있는 목욕탕 욕조에 물을 가득 채우는데, A 와 B 를 동시에 사용하면 p 분, B 와 C 를 동시에 사용하면 q 분, C와 A 를 동시에 사용하면 r 분이 걸린다고 한다. A, B, C 를 동시에 사용하면 몇 분이면 가득 차는가?

① $p+q+r$ ② $\dfrac{pq+qr+rp}{p+q+r}$ ③ $\dfrac{2pqr}{pq+qr+rp}$
④ $\dfrac{p+q+r}{pq+qr+rp}$ ⑤ $\dfrac{pqr}{pq+qr+rp}$

해설

욕조의 부피를 V , 수도꼭지 A, B, C 에서 매 분 나오는 물의 양을 a, b, c 라 하면

$\dfrac{V}{a+b} = p \cdots$ ㉠

$\dfrac{V}{b+c} = q \cdots$ ㉡

$\dfrac{V}{c+a} = r \cdots$ ㉢

㉠에서 $a+b = \dfrac{V}{p} \cdots$ ㉠'

㉡에서 $b+c = \dfrac{V}{q} \cdots$ ㉡'

㉢에서 $c+a = \dfrac{V}{r} \cdots$ ㉢'

㉠' + ㉡' + ㉢' 을 하면

$2(a+b+c) = \dfrac{grV+prV+pqV}{pqr}$

$\therefore a+b+c = \dfrac{pqV+qrV+rpV}{2pqr}$

구하는 값은 $\dfrac{V}{a+b+c}$ 이므로

$\dfrac{V}{\dfrac{pqV+qrV+rpV}{2pqr}} = \dfrac{2pqr}{pq+qr+rp}$(분)

22. 토정비결에서는 다음 조건에 맞는 3개의 수 A, B, C로 각 사람의 그해의 운세 $\boxed{A \mid B \mid C}$를 결정한다.

(1) A는 태어난 해에 해당하는 수를 3으로 나눈 나머지
(2) B는 태어난 달에 해당하는 수를 6으로 나눈 나머지
(3) C는 태어난 날에 해당하는 수를 8로 나눈 나머지

토정비결에 있는 서로 다른 운세 $\boxed{A \mid B \mid C}$는 모두 몇 가지인가? (단, 나머지가 0인 경우에는 나누는 수를 나머지로 한다)

① 64가지 ② 144가지 ③ 127가지
④ 216가지 ⑤ 254가지

해설

A는 1, 2, 3 총 3가지, B는 1부터 6까지 총 6가지, C는 1부터 8까지 총 8가지
따라서 총 가지 수는 $3 \times 6 \times 8 = 144$가지

23. 10원, 100원, 500원짜리 동전이 각각 12개, 3개, 2개가 있다. 이들 동전을 사용하여 지불할 수 있는 방법의 종류를 a가지, 지불할 수 있는 금액의 수를 b가지라 할 때, $a-b$ 의 값은? (단, 0원을 지불하는 경우는 제외한다.)

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 35

해설

(1) 각 동전을 사용하지 않는 경우도 지급방법 중에 포함되므로 각 동전수에 1을 더한 값을 곱하고 0원을 지불하는 경우는 제외하므로 3가지 동전을 모두 사용하지 않은 경우를 제한다.
$\therefore\ a=(12+1)\times(3+1)\times(2+1)-1=155$

(2) 10원 짜리 동전을 합하여 100원짜리 동전을 나타낼 수 있으므로 100원 짜리 동전을 10원짜리 동전으로 환산하면, 10원짜리 동전 42개, 500원 짜리 동전 2개를 지불하는 방법과 같으므로
$b=(42+1)\times(2+1)-1=128$

$\therefore a-b=155-128=27$

24. 100 원짜리 동전 2 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 4 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불하는 경우에 지불방법의 수를 a, 지불금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 98 가지

해설

10 원, 50 원, 100 원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용한다고 하면,

1) 지불방법의 수는

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$y = 0, 1, 2, 3$

$z = 0, 1, 2$

중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불방법의 총 가짓수 a 는,

$a = 5 \times 4 \times 3 - 1 = 59$ (가지)

2) 지불금액의 수를 구할 때 50 원짜리가 3 개이므로 이 중 2 개를 합하면 100 원짜리 하나와 같으므로 100 원짜리 동전 2 개를 50 원짜리 동전 4 개로 바꾸어 생각한다.

즉, 50 원짜리 7 개, 10 원짜리 4 개로 계산하는 금액과 동일하다.

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불금액의 총 가짓수 b 는,

$b = 5 \times 8 - 1 = 39$

$\therefore a + b = 59 + 39 = 98$

해설

a 를 구하기 위하여 동전 1 개, 2 개, $\cdots\cdots$ 9 개로 각각 만들 수 있는 금액의 경우를 알아보면,

동전 1 개 $\Rightarrow$ 10, 50, 100

동전 2 개 $\Rightarrow$ 20, 60, 100, 110, 150, 200

동전 3 개 $\Rightarrow$ 30, 70, 110, 120, 150, 160, 200, 210, 250

동전 4 개 $\Rightarrow$ 40, 80, 120, 130, 160, 170, 210, 220, 250, 260, 300

동전 5 개 $\Rightarrow$ 90, 130, 140, 170, 180, 220, 230, 260, 270, 310, 350

동전 6 개 $\Rightarrow$ 140, 180, 190, 230, 240, 270, 280, 320, 360

동전 7 개 $\Rightarrow$ 190, 240, 280, 290, 330, 370

동전 8 개 $\Rightarrow$ 290, 340, 380

동전 9 개 $\Rightarrow$ 390

이상에서, 지불방법의 총 가짓수 a 는,

$a = 3 + 6 + 9 + 11 + 11 + 9 + 6 + 3 + 1 = 59$ (가지)

25. 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 3개, 100원짜리 동전 1개의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

10 원짜리로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원
50 원짜리로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, 150원
100원짜리로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원

(1) 지불할 수 있는 방법의 수 : $3 \times 4 \times 2 - 1 = 23$

(2) 지불할 수 있는 금액의 수 : 50원짜리 2개로 지불하는 금액과 100원짜리 1개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 10원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 5개의 지불방법의 수와 같다.

10원짜리 지불 방법 3가지
50원짜리 지불 방법 6가지
지불하지 않는 방법 1가지 $\therefore\ 3 \times 6 - 1 = 17$
$\therefore\ a - b = 23 - 17 = 6$

26. 어떤 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지 상태 a, b, c로 바뀐다. 이 때, 다음 규칙이 적용된다고 하자.

> 규칙1: 에너지가 증가하면 b상태의 전자는 c상태로 올라가고, a상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 c상태로 올라간다.
> 규칙2: 에너지가 감소하면 b상태의 전자는 a상태로 내려가고, c상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 a상태로내려간다.

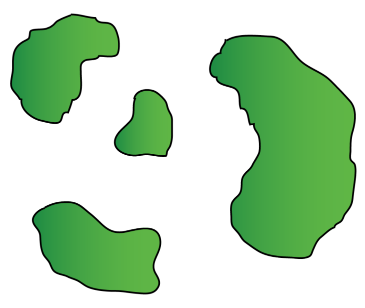
<단계1> 에서 전자는 a상태에 있다. 에너지가 증가하여 <단계2> 가 되면 이 전자는 b상태 또는 c상태가 된다. 이때, 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경로는 $a \to b$와 $a \to c$의 2가지이다. 다시 에너지가 감소하여 <단계3> 이 되면, 이 때까지의 가능한 변화 경로는 $a \to b \to a$, $a \to c \to b$, $a \to c \to a$의 3가지이다. 이와 같이 순서대로 에너지가 증감을 반복할 때, <단계1> 부터 <단계7> 까지 이 전자의 가능한 변화 경로의 수는?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

단계 1 : 1가지,
단계 2 : 2가지,
단계 3 : 3가지,
단계 4 : 5가지 $\cdots$
즉, 피보나치 수열을 이룬다.
따라서 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots\cdots$
$\therefore$ 단계 7 : 21

27. 다음 그림과 같이 4 개의 섬이 있다. 3 개의 다리를 건설하여 4 개의 섬 모두를 연결하는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : ______개

▷ 정답 : 16 개

해설

4개의 섬을 A, B, C, D라 하자.

(i) 한 섬에 다리를 1개 또는 2개를 건설하는 경우는

A → B → C → D

A → C → D → B

⋮

D → C → B → A

B → D → C → A

⋮

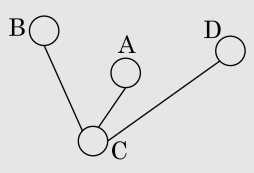
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$(가지)

A → B → C → D와 D → C → B → A,

A → C → D → B와 B → D → C → A는 같은 방법이므로

$\frac{24}{2} = 12$ (가지)

(ii) 아래의 그림과 같이 한 섬에 세 개의 다리를 건설하는 경우는 4 가지이다.



$\therefore 12 + 4 = 16$ (가지)

28. 1, 2, 3, 4, 5, 6 의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6 개의 상자와 6 개의 공이 있다. 한 상자에 하나씩 임의로 공을 담을 때, 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 상자의 수가 3 개인 경우의 수는?

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

해설

6 개의 상자 중에서 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 3 개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$ (가지) 이다.
이때, 예를 들어 선택된 상자가 1, 2, 3 이라 하면 나머지 4, 5, 6 상자는 공에 적힌 숫자와 모두 달라야 하므로 4, 5, 6 상자에 각각 (5, 6, 4) 또는 (6, 4, 5) 의 공이 차례로 들어가야 하므로 2 가지 경우가 있다.
그런데 나머지 경우에 대하여도 각각 2 가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는 $20 \times 2 = 40$ (가지)

29. 정수는 대학생이 되면 해외로 배낭여행을 하기로 하고, 가고 싶은 나라를 대륙별로 아래 표와 같이 적어보았다. 정수는 두 대륙을 여행하되 먼저 방문하는 대륙에서는 3개국을 여행하고, 두 번째 방문하는 대륙에서는 2개국을 여행하기로 하였다. 정수가 계획할 수 있는 배낭여행의 경우의 수를 구하여라. (단, 방문국의 순서는 고려하지 않는다.)

대륙	가고 싶은 나라
아시아	일본, 중국, 인도, 태국
유럽	프랑스, 이탈리아, 스페인, 그리스
아메리카	미국, 멕시코, 브라질
아프리카	이집트, 리비아, 튀니지

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 126가지

해설

(i) 4 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :

$2 \times {}_4C_3 \times {}_4C_2 = 2 \times 4 \times 6 = 48$

(ii) 3 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :

$2 \times {}_3C_3 \times {}_3C_2 = 2 \times 1 \times 3 = 6$

(iii) 4 개국이 있는 대륙과 3 개국이 있는 대륙을 여행하는 경우 :

$4 \times ({}_4C_3 \times {}_3C_2 + {}_3C_3 \times {}_4C_2) = 72$

이상을 정리하면 126

30. 다음 그림은 2008 년 9 월 달력의 일부분이다.

S	*M*	*T*	*W*	*T*	*F*	*S*
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20

대원이는 9 월 1 일부터 9 월 20 일까지 일주일에 2회씩 모두 6 번을 학교에서 보충학습을 하려고 한다. 보충학습을 하는 6 일의 요일을 모두 다르게 정하는 방법의 수는? (단, 일요일에는 보충학습을 하지 않는다.)

① 30　② 45　③ 60　④ 90　⑤ 120

해설

9 월 셋째 주의 월, 화, 수, 목, 금, 토의 6 일 중에서 이틀을 정하는 방법의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ (가지)}$$

둘째 주에는 셋째 주에서 정한 요일을 제외하고 이틀을 정하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ (가지)}$$

첫째 주에는 남은 요일로 결정되므로 이틀을 정하는 방법의 수는 1가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $15 \times 6 \times 1 = 90$ (가지)

31. 퓨전식당의 메뉴에는 4 가지 종류의 한식, 4 가지 종류의 중식, 3 가지 종류의 일식이 있다. 중식의 특정한 음식 2 가지를 포함하면서 한식과 일식이 각각 적어도 한 종류는 포함되도록 6 가지 종류의 음식을 주문하는 방법의 수는?

① 84　② 94　③ 102　④ 106　⑤ 118

해설

중식의 특정한 음식 2 가지를 포함하므로 한식 4 종류, 중식 2 종류, 일식 3 종류에서 모두 4 가지 종류의 음식을 주문하면 된다.

$\therefore {}_9C_4 = \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$ (가지)

그런데 한식과 일식이 각각 적어도 한 종류는 포함되는 사건의 여사건은 한식만 주문하거나 한식과 중식만 주문하거나 중식과 일식만 주문하는 경우이다. 따라서 여사건의 종류와 그 경우의 수는 다음 표와 같다.

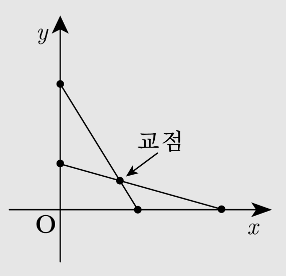
④한식	②중식	③일식	경우의수
4			${}_4C_4 = 1$
3	1		${}_4C_3 \times {}_2C_1 = 8$
2	2		${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6$
	1	3	${}_2C_1 \times {}_3C_3 = 2$
	2	2	${}_2C_2 \times {}_3C_2 = 3$

따라서 구하는 경우의 수는 $126 - (1+8+6+2+3) = 106$ (가지)

32. 양의 x 축에서 10 개의 점, 양의 y 축에서 5 개의 점을 잡으면, 이 15 개의 점을 끝점으로 하는 제 1사분면의 선분 50 개가 만들어진다. 이 50 개의 선분이 만드는 교점의 최대수는?

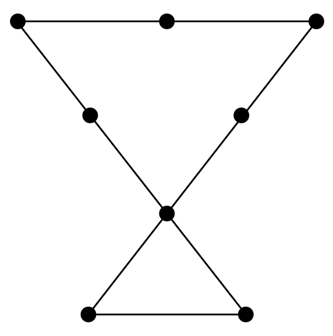
① 250　② 450　③ 500　④ 1250　⑤ 2500

해설



교점은 그림과 같이 두 선분이 X 자로 교차했을 때 1 개씩 생기고, 이와 같이 교차하는 선분은 x축, y축에서 각각 2 개씩의 점을 택하면 1 개씩 생긴다. 따라서 교점의 최대 개수는 어느 세 선분도 한 점에서 만나지 않는 경우이므로 ${}_{10}C_2 \cdot {}_5C_2 = 45 \cdot 10 = 450$ 이다.

33. 그림과 같이 삼각형의 두 변을 연장하여 또 다른 삼각형을 만들었다. 이 도형 위에 있는 8개의 점 중에서 3개의 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수는?

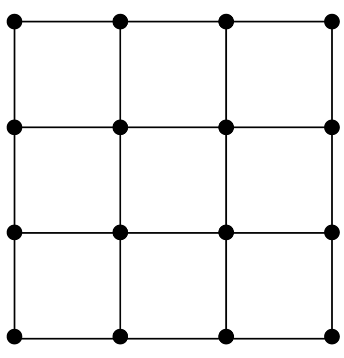


① 36 ② 47 ③ 54 ④ 66 ⑤ 75

해설

8개의 점 중에서 3개의 점을 선택하는 경우에서
직선위의 점 중 3 개를 선택하는 경우를 빼준다.
$\Rightarrow {}_8C_3 - ({}_4C_3 + {}_4C_3 + {}_3C_3) = 47$

34. 아래 그림과 같이 정사각형 모양으로 16 개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 몇 개인가?

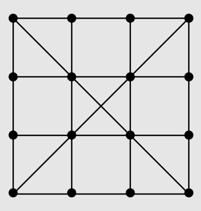


① 342 ② 428 ③ 489 ④ 516 ⑤ 642

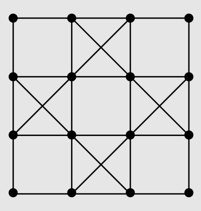
해설

전체 삼각형의 개수에서 일직선 위에 있는 점들 중 3개를 고를 경우를 제한다.

1) 점 4 개가 한 직선 위에 있는 경우 : 10 가지

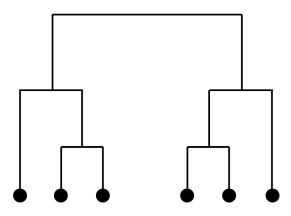


2) 점 3 개가 한 직선 위에 있는 경우 : 4 가지



${}_{16}C_3-({}_4C_3\times 10+{}_3C_3\times 4)=516$

35. 씨름 대회에 참가한 6명이 그림과 같은 토너먼트방식으로 시합을 가질 때, 대진표를 작성하는 방법은 몇 가지인가?



① 45　② 60　③ 75　④ 90　⑤ 105

해설

우선 3 팀씩 두 조로 나눈다.

$\Rightarrow {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 10$

그리고 뽑은 세팀중에서 부전승 한팀만 뽑으면
한쪽의 대진표는 자연히 만들어 진다.

$\therefore 10 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 90$