

1. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$ 이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = -3$

인수정리와 조립제법을 이용하면

(좌변) $= (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

2. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
 $\therefore k = 3$

3. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

- (가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

- ① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

4. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $-3, 1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근은 $1 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (-3)(1 - \sqrt{2}) + (-3)(1 + \sqrt{2}) = -7$$

$$b = -(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})(-3) = -3$$

$$\therefore a + b = -10$$

5. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

- ① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$
③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$
④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면
다른 한 근은 $1-i$ 이다.
 $\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
 $(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$
 $\therefore$ ①이 조건에 맞다

6. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

7. 삼차방정식 $x^3 + x^2 - (k+2)x + k = 0$ 이 중근을 가질 때, k 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ -1, 3 ④ 0, 3 ⑤ 3

해설

$x^3 + x^2 - (k+2)x + k = 0$, $(x-1)(x^2 + 2x - k) = 0$ 이 중근을 가지려면

i) $x = 1$ 이 중근일 때,

$$1 + 2 - k = 0$$

$$\therefore k = 3$$

ii) $x^2 + 2x - k = 0$ 이 중근이면

$$\frac{D}{4} = 1 + k = 0$$

$$\therefore k = -1$$

8. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$ 의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면
 $(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
 $(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
 $260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$ 가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$ 도 근이다.
나머지 한 근을 α 라고 하면 근과 계수와의 관계에서
 $(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $\alpha = m - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉡}$ 에서 $8\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
 $\therefore m = 10$

9. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 - 8x + 4b = 0$ 이 중근 $x = 2$ 를 갖도록 상수 a, b 의 값으로 알맞게 짝지어진 것은?

- ① $a = -1, b = 1$ ② $a = 0, b = 2$ ③ $a = -1, b = 3$
④ $a = 0, b = 4$ ⑤ $a = -2, b = 5$

해설

삼차방정식이 $x = 2$ 를 근으로 가지므로 x 에 2를 대입하면
 $8 + 4a - 16 + 4b = 0, a = 2 - b$
 $\therefore x^3 + ax^2 - 8x + 4b = x^3 + (2 - b)x^2 - 8x + 4b$
 $= (x - 2) \{x^2 + (4 - b)x - 2b\}$
위의 식에서 $x = 2$ 가 중근이라고 했으므로 이차식의 하나의 근도 2가 된다.
따라서 이차식에 $x = 2$ 를 대입하면 0이 되므로
 $4 + 8 - 2b - 2b = 0$
 $\therefore a = -1, b = 3$

10. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + (a+2)x^2 + 4ax + 2a^2 = 0$ 이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > \frac{1}{2}$

② $a \geq \frac{1}{2}$

③ $a > 1$

④ $a < \frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{2} < a < 1$

해설

방정식 $x^3 + (a+2)x^2 + 4ax + 2a^2 = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & a+2 & 4a & 2a^2 \\ & & -a & -2a & -2a^2 \\ \hline & 1 & 2 & 2a & 0 \end{array}$$

$$(x+a)(x^2 + 2x + 2a) = 0$$

이 때, 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면

$x^2 + 2x + 2a = 0$ 이 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a < 0 \quad \therefore a > \frac{1}{2}$$

11. $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두 근이 $1+i$, $1-i$ 일 때, 이 방정식의 나머지 두 근을 구하면?

① $x = -\frac{-1 + -\sqrt{3}i}{2}$

② $x = \frac{1 + -\sqrt{3}i}{2}$

③ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

④ $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두근이 $1+i$, $1-i$ 이므로

$x^2 - 2x + 2$ 는 $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ 의 인수이다.

따라서,

$$\therefore x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1)$$

$$\therefore x^2 + x + 1 = 0 \text{ 일 때의 근은 } \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

12. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$ 의 한 근이 1일 때, 허근은?

- ① $\pm i$ ② $\pm 2i$ ③ $\pm 3i$ ④ $\pm 4i$ ⑤ $\pm 5i$

해설

한 근이 1이므로 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$ 에 대입하면

$$1 + 3 + a = 0, \quad \therefore a = -4$$

방정식 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 치환하면

$$t^2 + 3t - 4 = 0, \quad (t + 4)(t - 1) = 0, \quad (x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2i \text{ 또는 } x = \pm 1$$

따라서, 주어진 방정식의 허근은 $\pm 2i$ 이다.

13. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4, \alpha\beta\gamma = -3 \text{ 이므로} \\ (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \\ &= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - 2 + 4 + 3 = 6 \end{aligned}$$

14. 방정식 $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 5, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -1 \text{ 이므로} \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \\ &= 1 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 1 + 2 - (-1) - 5 = -1 \end{aligned}$$

15. x 에 관한 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때 $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = -4$ 이므로
 $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$
 $= 1 - 3 + 2 + 4 = 4$

16. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 사이에 $\alpha + \beta = \gamma$ 인 관계가 성립할 때, a 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -2 ④ -1 ⑤ -3

해설

$$x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\alpha\beta\gamma = -6 \cdots \cdots \text{㉢}$$

문제 조건에서 $\alpha + \beta = \gamma$ 이므로

$$\text{㉠에서 } 2\gamma = 2, \quad \therefore \gamma = 1$$

$$\text{㉢에 } \gamma = 1 \text{ 을 대입하면, } \alpha\beta = -6$$

$$\text{㉡에서 } \alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = \alpha\beta + \gamma^2 = a$$

$$\gamma = 1, \alpha\beta = -6 \text{ 을 대입하면 } -6 + 1 = a$$

$$\therefore a = -5$$

17. x 의 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 105 = 0$ 의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① 56 ② 21 ③ 10 ④ -10 ⑤ -21

해설

세 근을 α, β, γ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \alpha\beta\gamma = 105$$

$$\text{마지막 식에서 } \alpha\beta\gamma = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.

$$\therefore p = -(3 + 5 + 7) = -15,$$

$$q = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 15 + 35 + 21 = 71$$

$$\therefore p + q = 56$$

18. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, $a - 2b + c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면
 $\alpha + \beta + \gamma = -1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = 3$
구하려는 방정식의 세 근의 합
 $-1 + 2 + 3 = 4 \quad \therefore a = -4$
 $(-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -2 + 6 - 3 = 1 \quad \therefore b = 1$
세 근의 곱 $(-1) \times 2 \times 3 = -6 \quad \therefore c = 6$
 $\therefore a - 2b + c = -4 - 2 + 6 = 0$

19. 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, r 라 할 때, $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근이
 α, β, r 이므로
 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$
양변에 $\sqrt{2}$ 를 대입하면
 $4\sqrt{2} - 6 + 6$
 $= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$
 $\therefore (\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$

20. 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하는 x 의 삼차방정식은 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -3$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2$$

$$\alpha\beta\gamma = 1$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -3$$

$$-c = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

$$\therefore c = -1$$

$$\therefore a + b + c = -2$$

21. a, b 가 실수이고 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 다른 한 근을 α 라고 하면삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$$(1 + i) + (1 - i) + \alpha = -a \cdots \textcircled{1}$$

$$(1 + i)(1 - i) + (1 + i)\alpha + (1 - i)\alpha = -4 \cdots \textcircled{2}$$

$$(1 + i)(1 - i)\alpha = -b \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \alpha = -3$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{에 각각 대입하면 } a = 1, b = 6$$

$$\therefore a + b = 7$$

해설

[별해1] 계수가 실수이므로 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 따라서 주어진 방정식의 좌변은 $\{x - (1 - i)\} \{x - (1 + i)\} = x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나눗셈을 하여 정리하면 $x^3 + ax^2 - 4x + b = (x^2 - 2x + 2)(x + a + 2) + (2a - 2)x + b - 2a - 4$
 $\therefore 2a - 2 = 0, b - 2a - 4 = 0$

$$\therefore a = 1, b = 6$$

주어진 방정식에 $1 + i$ 를 대입하여 복소수의 상등을 이용해도 된다.

22. a, b 가 실수일 때, 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 이면 $a + b$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 나머지 한 근을 α 라 하면

$$(1 + i) + (1 - i) + \alpha = -a$$

$$\therefore 2 + \alpha = -a \cdots \textcircled{1}$$

$$(1 + i)(1 - i) + (1 - i)\alpha + (1 + i)\alpha = -4$$

$$\therefore 2 + 2\alpha = -4 \cdots \textcircled{2}$$

$$(1 + i)(1 - i)\alpha = -b$$

$$\therefore 2\alpha = -b \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } \alpha = -3, a = 1, b = 6$$

$$\therefore a + b = 7$$

23. 삼차방정식 $2x^3 + px^2 + qx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 - 2i$ 일 때 $p + q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

- ① 7 ② -7 ③ 6 ④ -6 ⑤ 11

해설

한 근이 $1 - 2i$ 이므로 다른 두 근을 $1 + 2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱 :

$$(1 - 2i)(1 + 2i)\alpha = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{세 근의 합: } -\frac{p}{2} = (1 - 2i) + (1 + 2i) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore p = -5$$

$$\text{두근끼리 곱의 합: } \frac{q}{2} = (1 - 2i)(1 + 2i) + (1 - 2i + 1 + 2i) \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$\therefore q = 12$$

$$\therefore p + q = 7$$

해설

한 근이 $1 - 2i$ 이므로 다른 한 근은 $1 + 2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$

나머지 일차식을 $2x + a$ 라고 하면

$$2x^3 + px^2 + qx - 5 = (2x + a)(x^2 - 2x + 5) \text{ 에서}$$

$a = -1$ 이므로 대입하여 정리하면

$$p = -5, q = 12$$

$$\therefore p + q = 7$$

24. 방정식 $x^3 + x^2 + px + q = 0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$ 이므로

켈레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해

$$-1 = (1-i) + (1+i) + \alpha \therefore \alpha = -3$$

$$p = (1-i)(1+i) - 3(1-i) - 3(1+i)$$

$$\therefore p = -4$$

$$-q = (1-i)(1+i) \cdot (-3) = -6$$

$$\therefore q = 6$$

$$\therefore p+q = -4+6 = 2$$

25. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면 $(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.
 $\therefore b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4$, $b = 6$ 이다.
 $\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

26. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면
 $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \dots\dots\dots \textcircled{A}$
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \dots\dots\dots \textcircled{B}$
 $\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \dots\dots\dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

27. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$ 의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \alpha$ 라고 하면
 $(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + \alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$
 $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\alpha = -a \quad \cdots \textcircled{㉡}$
 $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha = b \quad \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $\alpha = -2$ 를 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면
 $-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore a = 5$
 $\alpha = -2$ 를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$
 $\therefore a + b = 5 + 2 = 7$