1. $\dfrac{2x+1}{x^3-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

2. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$ ④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로

(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

3. $x=-2-i$ 일 때, $x^2+4x+10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x=-2-i$ 에서 $x+2=-i$ 의 양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(-i)^2$ 이므로

$x^2+4x=-5$

$\therefore\ x^2+4x+10=-5+10=5$

4. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore \; m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore \; x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

5. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위을 구하면?

① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$

④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

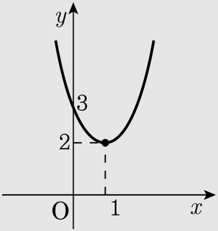
해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.

$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로

함숫값의 범위은 $2 < y < 3$



6. x^3-4x^2+5x-3 을 $A(x-3)^3+B(x-3)^2+C(x-3)+D$ 로 나타낼 때, $ABCD$ 의 값을 구하면?

① -20　　② 40　　③ -60　　④ 120　　⑤ -120

해설

x^3-4x^2+5x-3 을 $x-3$ 에 대해 내림차순으로 정리하기 위해 $x-3$ 으로 반복하여 나누면 나머지가 차례로 D, C, B, A 가 되므로

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
3 & 1 & -4 & 5 & -3 & & \\
 & & 3 & -3 & 6 & & \\ \hline
3 & 1 & -1 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & & & \\ \hline
3 & 1 & 2 & \boxed{8} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}$$

$\therefore\ ABCD=1\times5\times8\times3=120$

7. 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-7x+6인 두 이차다항식의 합은?

① $2x^2+x+3$　② $2x^2+3x-1$　③ x^2-x-2

④ $2x^2-x-1$　⑤ x^2-3x-2

해설

최대공약수가 $x-1$이므로
두 다항식을 $A(x-1),\ B(x-1)$
$(A,\ B$는 서로소인 일차식$)$으로 놓으면
$x^3-7x+6=AB(x-1)$
$(x-1)(x-2)(x+3)=AB(x-1)$
$\therefore\ AB=(x-2)(x+3)$
$A,\ B$는 일차식이어야 하므로

$$\begin{cases} A=x-2 \\ B=x+3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} A=x+3 \\ B=x-2 \end{cases}$$

따라서 두 다항식은 $(x-1)(x-2),\ (x-1)(x+3)$이다.
$\therefore$ (두 다항식의 합)
$=(x-1)(x-2)+(x-1)(x+3)=2x^2-x-1$

8. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

$$= \sqrt{3\cdot(-3)} - \sqrt{(-3)\cdot(-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$

$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$

$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$

$$= -3 + 3i$$

9. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, $\alpha\beta \neq 0$)

① $ax^2+bx+c=0$
② $cx^2+bx+a=0$
③ $cx^2-bx+a=0$
④ $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{b}+\frac{1}{c}=0$
⑤ $abx^2+bcx+ca=0$

해설

$ax^2+bx+c=0$에서

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$$

$\therefore\ x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$에서

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0,$$

$$cx^2+bx+a=0$$

10. 이차함수 $y = ax^2 + 4x + 2$ 에서 $|a| = 1$ 일 때, 각각의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = ax^2 + 4x + 2$$
$$= a\left(x + \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a} + 2$$

$a = 1$ 일 때, $-\frac{4}{1}+2$를 최솟값, $a = -1$ 일 때 $\frac{4}{1}+2$를 최댓값으로 갖는다.

$\therefore\ (-2) + 6 = 4$

11. $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　② 8　③ 4　④ 2　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

12. $\dfrac{899^3+1}{899\times 898+1}$ 의 양의 약수의 개수는?

① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a=899$ 라 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^3+1}{a(a-1)+1}\\ &= \frac{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}{a^2-a+1}\\ &= a+1=900\end{aligned}$$

$900=2^2\times 3^2\times 5^2$

$\therefore$ 900 의 약수의 개수 $=(2+1)\times(2+1)\times(2+1)$
$=27$

13. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x+1.5y+2z=40\cdots$ ㉠
$x+y+z=30\cdots$ ㉡
$(x\geq 1,\ y\geq 1,\ z\geq 1)$라고 하면
㉠ $\times 2-$ ㉡ $\times 3=-x+z=-10$,
$x=z+10,\ z\geq 1$이므로
$x=z+10\geq 11$
이 때 $y=18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

14. x^8 을 $x+\frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$$

$x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $R=\frac{1}{2^8}$

$$x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$$

$$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$$

$$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$$

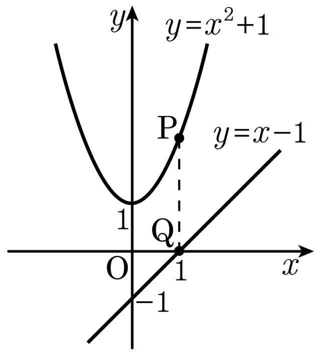
$$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=Q(x)$$

$$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{16}$$

15. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$