1. 다음 식에서 $m+n$ 의 값을 구하여라.

$$4^{m+5} = 4^m \times 2^n = 4096$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$\begin{aligned} 4^{m+5} &= 4^m \times 4^5 \\ &= 4^m \times 2^{10} \\ &= 4^m \times 2^n \ \Rightarrow \therefore\ n = 10 \\ &= 2^{2m} \times 2^{10} \ \Rightarrow \therefore\ m = 1 \\ &= 2^{12} = 4096 \end{aligned}$$

$\therefore m+n = 10+1 = 11$

2. 현재 통장에 희진이는 4000 원, 문희는 7000 원이 예금되어 있다. 다음 달부터 희진이는 매월 1000 원씩, 문희는 500 원씩 예금한다면 희진이의 예금액이 문희의 예금액보다 많아지는 것은 몇 개월 후 부터인가?

① 4 개월 ② 5 개월 ③ 6 개월
④ 7 개월 ⑤ 8 개월

해설

개월 수를 x라 할 때
$4000 + 1000x > 7000 + 500x \quad \therefore x > 6$
따라서 7 개월 후 부터 문희의 예금액보다 많아진다.

3. 자연수 a, b 에 대하여 $\dfrac{0.\dot{a}0\dot{b}}{0.\dot{b}0\dot{a}} = 1.2\dot{4}$ 일 때, $0.\dot{a}\dot{b} - 0.\dot{b}\dot{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{11}$

해설

$$\frac{0.\dot{a}0\dot{b}}{0.\dot{b}0\dot{a}} = \frac{\frac{100a+b}{999}}{\frac{100b+a}{999}} = \frac{100a+b}{100b+a} = 1.2\dot{4} = \frac{112}{90} = \frac{56}{45}$$

$\Rightarrow 45(100a+b) = 56(100b+a)$

$\Rightarrow 4a = 5b$

a, b 는 한자리 정수이어야 하므로, $a = 5, b = 4$ 이다.

$\therefore\ 0.\dot{5}\dot{4} - 0.\dot{4}\dot{5} = \dfrac{54}{99} - \dfrac{45}{99} = \dfrac{9}{99} = \dfrac{1}{11}$

4. 자연수 n 의 일의 자리숫자를 $R(n)$ 이라고 할 때, $R(2^{97}) \times R(3^{98})$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32, \cdots$ 이므로
2 의 거듭제곱의 일의 자리 숫자는 2, 4, 8, 6 이 반복된다.
$97 \div 4 = 24 \cdots 1$ 이므로 $R(2^{97}) = 2$
$3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81,\ 3^5 = 243, \cdots$ 이므로
3 의 거듭제곱의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1 이 반복된다.
$98 \div 4 = 24 \cdots 2$ 이므로 $R(3^{98}) = 9$
$\therefore\ 2 \times 9 = 18$

5. 영희는 철수와의 약속 시간보다 1시간 먼저 도착하여 그 시간을 이용하여 평소 원하던 책을 사기위해 서점에 갔다. 약속 장소에서 서점까지는 시속 4km의 속력으로 가고 서점에서 약속 장소까지는 시속 2km의 속력으로 왔다고 한다. 책을 사는데 15분이 걸렸다면 약속 장소에서 서점까지의 거리는 몇 km 이내에 있어야 하는가?

① 1km ② 1.1km ③ 1.2km
④ 1.3km ⑤ 1.4km

해설

약속 장소에서 서점까지의 거리를 x라 하면

$\frac{x}{4} + \frac{15}{60} + \frac{x}{2} \geq 1$

$\therefore\ x \geq 1(\text{km})$

따라서 1km 이내에 있어야 한다.

6. 부등식 $\frac{x}{4} - a \geq \frac{3x-2}{5}$ 를 만족하는 정수 중 가장 큰 수는 -16 이라고 할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

부등식 $\frac{x}{4} - a \geq \frac{3x-2}{5}$ 를 정리하면

$5x - 20a \geq 12x - 8$ 에서 $-7x \geq 20a - 8$

$\therefore\ x \leq \frac{-20a+8}{7}$

부등식을 만족하는 가장 큰 정수가 -16 이므로

$\frac{-20a+8}{7} = -16$

$-20a + 8 = -112$

$-20a = -120$

$\therefore\ a = 6$

7. 부등식 $x-2 \le 2(3x+1)$ 을 만족하는 정수의 최솟값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x-2 \le 6x+2$

$-4 \le 5x$

$-\frac{4}{5} \le x$

따라서 만족하는 정수의 최솟값은 0 이다.

8. 다람쥐가 18m 높이의 나무를 오르려고 한다. 이 다람쥐는 1 시간 올라가면 2m 씩 내려가는 습관이 있다고 한다. 4 시간 이내에 나무를 오르려 할 때, 다람쥐는 1 시간에 적어도 몇 m 씩 올라가야 하는지 구하면?

① 3m ② 4m ③ 5m ④ 6m ⑤ 7m

해설

다람쥐가 1 시간에 올라가야 할 거리를 x 라 할 때

$4x - 3 \times 2 \geq 18, \quad x \geq 6$

다람쥐는 1 시간에 적어도 6m 이상 올라가야 한다.

9. $-1 < \frac{3x}{4} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} \le \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$ 일 때, $6x - 5y$ 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-33 < 6x - 5y < -6$

해설

$-1 < \frac{3x}{4} < \frac{1}{2}$ 에서

$-\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3}$, $-8 < 6x < 4 \cdots$ ㉠

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$ 에서

$2 < y \le 5$, $-25 \le -5y < -10 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 을 하면 $-33 < 6x - 5y < -6$

10. $(4^2)^a = 256$ 일 때, 부등식 $3(x-2) < ax+1$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$(4^2)^a = (2^4)^a = 2^{4a} = 256 = 2^8$

$4a = 8,\ a = 2$

$3(x-2) < 2x+1$

$3x-6 < 2x+1$

$\therefore\ x < 7$

따라서 자연수 x 는 6 개이다.

11. 분수 $\frac{a}{120}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이 될 때, 양의 정수 a 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.(단, $a < 100$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

분모가 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 a 는 3 의 배수이고, 기약분수로 고쳤을 때 $\frac{3}{b}$ 이므로 a 는 9 의 배수가 된다. 따라서 a 의 최댓값은 90 , a 의 최솟값은 9 가 된다.

$\therefore 90 - 9 = 81$

12. 자연수 n 과 유리수 x, y 에 대하여 $xy = -1$ 일 때, $x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$xy = -1$ 이면 $\frac{1}{x} = -y$, $\frac{1}{y} = -x$ 이므로

$x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$
$+(xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$
$= x^{2n-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1} + y^{2n-1} + \left(\frac{1}{y}\right)^{2n-1}$
$+(-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n}$
$= x^{2n-1} + (-y)^{2n-1} + y^{2n-1} + (-x)^{2n-1}$
$+(-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n}$

자연수 n 에 대하여 $2n-1$ 은 홀수이므로

$\therefore\ x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$
$+(xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$
$= x^{2n-1} - y^{2n-1} + y^{2n-1} - x^{2n-1} - 1 - 1$
$= -2$

13. $2^{14} \times 5^{18}$ 은 n 자리의 자연수이다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$2^{14} \times 5^{18} = (2 \times 5)^{14} \times 5^4 = 10^{14} \times 5^4 = 625 \times 10^{14}$
따라서 17 자리의 자연수이다.

14. $ax-3>x+1$ 의 해가 $x<\dfrac{4}{a-1}$ 일 때, 다음 부등식의 해는?

$2(ax-1)+5<2x-1$

① $x>\dfrac{-2}{a-1}$　② $x>\dfrac{2}{a-1}$　③ $x<\dfrac{-2}{a-1}$
④ $x<\dfrac{2}{a-1}$　⑤ $x>\dfrac{-4}{a-1}$

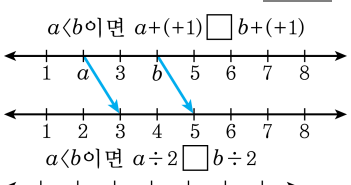
해설

$ax-3>x+1$ 을 정리한 $(a-1)x>4$ 의 해가 $x<\dfrac{4}{a-1}$ 로 부등호 방향이 바뀌었으므로 $a-1<0$
이제, $2(ax-1)+5<2x-1$ 을 정리하여 풀면,
$2ax-2+5<2x-1$
$2(a-1)x<-4$
$(a-1)x<-2$
이때 $a-1<0$ 이므로 $x>\dfrac{-2}{a-1}$ 이다.

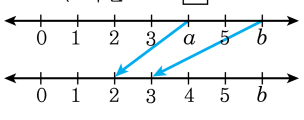
15. 다음 보기는 부등식의 성질을 수직선 위에 나타낸 것이다. 다음 $\square$ 안에 알맞은 부등호를 차례대로 써넣어라.

보기

(1) $a<b$이면 $a+(+1)\square b+(+1)$



(2) $a<b$이면 $a\div 2\square b\div 2$



▶ 답 :

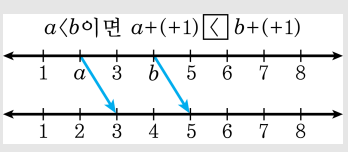
▶ 답 :

▷ 정답 : <

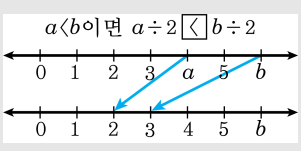
▷ 정답 : <

해설

(1) $a<b$이면 $a+(+1)\boxed{<}b+(+1)$



(2) $a<b$이면 $a\div 2\boxed{<}b\div 2$



16. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 이라고 정의한다. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 1000 = x^{500} \times y!$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 502

해설

$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 1000$
$= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 4) \times \cdots \times (2 \times 500)$
$= 2^{500} \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 500)$
$= 2^{500} \times 500!$
$\therefore\ x = 2,\ y = 500$
$\therefore x + y = 502$

17. 다음 중 가장 작은 수는?

① 2^{20} ② 3^{15} ③ 4^{10} ④ 5^{5} ⑤ 6^{5}

해설

① $2^{20} = (2^4)^5$
② $3^{15} = (3^3)^5$
③ $4^{10} = 2^{20} = (2^4)^5$
따라서 가장 큰 작은 수는 ④이다.

18. $x=3,\ y=2$ 일 때, $(-8x^2y+12xy^2)\div(-2)^2xy-(9xy-6y^2)\div 3y$ 의 값은?

① -10　② -5　③ -13　④ 5　⑤ 10

해설

$(-8x^2y+12xy^2)\div(-2)^2xy-(9xy-6y^2)\div 3y$

$=\dfrac{-8x^2y+12xy^2}{4xy}-\dfrac{(9xy-6y^2)}{3y}$

$=-2x+3y-(3x-2y)$

$=-5x+5y$

$x=3,\ y=2$ 를 대입하면

$(-5)\times 3+5\times 2=-15+10=-5$

19. 어떤 자연수에 $1.0\dot{4}$ 를 곱해야 할 것을 잘못하여 1.04 를 곱했더니 정답과 오답의 차가 $0.\dot{4}$ 가 되었다. 그 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

$x \times 1.0\dot{4} - x \times 1.04 = 0.\dot{4}$

$x \times \left(\frac{94}{90} - \frac{104}{100}\right) = \frac{4}{9}$

$x \times \frac{4}{900} = \frac{4}{9}$

$\therefore\ x = 100$

20. 순환소수 $1.2\dot{6}$에 A를 곱하면 그 결과는 자연수가 된다고 한다. 이때, A의 값이 될 수 <u>없는</u> 것을 모두 고르면?

① 5　　② 15　　③ 60　　④ 90　　⑤ 99

해설

$1.2\dot{6} = \frac{126-12}{90} = \frac{114}{90} = \frac{19}{15}$이므로 A는 15의 배수이어야 한다.
따라서 A의 값이 될 수 없는 것은 5 , 99이다.