

1. 두 집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 48 \text{의 약수 중 한 자리수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } a \text{보다 작은 자연수}\}$ 에 대하여
 $n(A) = 2 \times n(B)$ 를 만족하는 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 이고, $n(A) = 2 \times n(B)$ 에서 $n(A) = 6$ 이므로
 $6 = 2 \times n(B)$ 이다. 따라서 $n(B) = 3$ 이 되고, $n(B)$ 가 3이 되려면
 a 는 4가 되어야 한다.

2. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A^c \cap B = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$

㉡ $A \cup B = B$

㉢ $A^c \subset B^c$

㉤ $A \cap B = B$

㉥ $A \cup B^c = U$

㉦ $A - B = \emptyset$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore B \subset A$

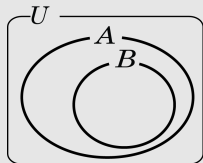
㉠ $A = B$ 는 $B \subset A, A \subset B$ 이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \leftrightarrow A^c \subset B^c$

㉤ $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉥ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개



3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 짝수인 집합 A 의 부분집합의 개수는?

① 6 개

② 12 개

③ 18 개

④ 24 개

⑤ 30 개

해설

$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ 적어도 하나는 짝수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 홀수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$ (개)이다.

4. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

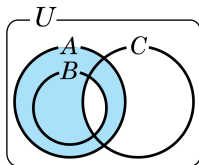
① $A - (B \cap C)$

② $(A - B) \cap C$

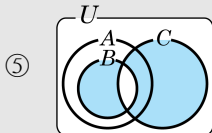
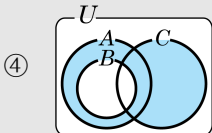
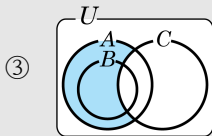
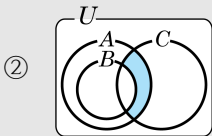
③ $(A \cup B) - C$

④ $(A \cup C) - B$

⑤ $(A \cap B) \cup C$



해설



5. 전체집합 U 의 부분집합에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A^c \cap B$ 인 관계가 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $A = B$

② $A \subset B$

③ $B \subset A$

④ $A \cup B = U$

⑤ $A \cap B = \emptyset$

해설

(좌변) : $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
 $= (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ ($\because$ 차집합의 성질)
(우변) : $A^c \cap B = B - A$ ($\because$ 차집합의 성질) 이므로 (좌변) = (우변)
이 되기 위해서는 $A - B = \emptyset$ 이 되어야 한다.

$\therefore A - B = \emptyset$ 가 되기 위해서는 $A \subset B$

6. 두 집합 $A = \{3, a+1, 9\}$, $B = \{a-1, a, a+3\}$ 에 대하여 $A - B = \{5, 9\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

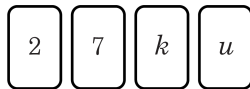
$A - B = \{5, 9\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.

$$a + 1 = 5$$

$$\therefore a = 4$$

7.

한쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영문자가
쓰여진 카드가 다음 규칙을 만족한다. ‘카
드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽
면에는 자음이 적혀 있다.’ 탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4장이
위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 반드시 확인해야 할
필요가 있는 것은?



①



②



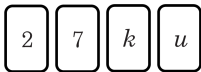
③



④



⑤



해설

주어진 규칙의 대우는 ‘한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽
면에는 짝수가 적혀 있다.’이다. 따라서 홀수가 적혀있는 카드와
모음이 적혀 있는 카드만 확인하면 된다.

8. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은 ?

- ① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.
- ② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ③ 겨울이 오면 눈이 온다.
- ④ 눈이 오면 겨울이 온다.
- ⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.

라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.

- ① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
- ② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
- ③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r$ (삼단논법)
- ④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
- ⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

9. 집합 A, B, C 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B), q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A, q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A, q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A, q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B, q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftarrow A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \subset (B \cap C)$

$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$

$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$

$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$

$(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

$B \subset A \Leftarrow B = \emptyset$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$

$q : A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$

$\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

10. $-1 \leq x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$ 이기 위한 필요조건은 $x \geq a$ 이고, 충분조건은 $x \geq b$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

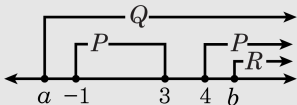
④ 2

⑤ 3

해설

$P = \{x \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ or } x \geq 4\}$, $Q = \{x \mid x \geq a\}$, $R = \{x \mid x \geq b\}$

이라 하면 $P \subset Q$, $R \subset P$



$$a \leq -1, \quad b \geq 4$$

$$\therefore -1 + 4 = 3$$

11. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 4y^2 + 4xy + 10x + ay + b > 0$ 이 성립할 a, b 의 조건은? (단, a, b 는 실수)

① $a = 20, b > 25$

② $a = 20, b < 25$

③ $a = 20, b \geq 25$

④ $a = 20, b \leq 25$

⑤ $a = 20, b \neq 25$

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠이 x 의 모든 실수값에 대하여 성립하려면

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$\therefore (a - 20)y + b - 25 > 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡이 모든 y 에 대하여 성립하려면 $a = 20$ 이고 $b > 25$ 이다.

12. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

13. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
 y 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$ 분이다.

시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0$, $y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서 xy 의 최댓값은 45이다.

14. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 2 \text{일 때}) \\ 0 & (x > 2 \text{일 때}) \end{cases} \text{라 정의하자. 이 때, } f^{2006}(1) - f^{2006}(3)$$

의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^{n+1} = (f \circ f^n)$ 이다.)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$1) f(1) = 2, f^2(1) = 3, f^3(1) = 0, f^4(1) = 1 \dots$$

$$\Rightarrow f^{2004}(1) = (f^4)^{501}(1) = 1$$

$$\therefore f^{2006}(1) = f^2(1) = 3$$

$$2) f(3) = 0, f^2(3) = 1, f^3(3) = 2, f^4(3) = 3, f^5(3) = 0 \dots$$

$$\Rightarrow f^{2004}(3) = (f^4)^{501}(3) = 3$$

$$\therefore f^{2006}(3) = f^2(3) = 1$$

$$\therefore f^{2006}(1) - f^{2006}(3) = 2$$

15. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x (x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

① $\frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$

② $\frac{x+1}{x-2} (x \neq 2)$

③ $\frac{x-1}{x-2} (x \neq -1)$

④ $\frac{x+2}{x+1} (x \neq -1)$

⑤ $\frac{x+2}{x-1} (x \neq 1)$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x \text{ 에서}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = t \text{ 로 놓으면 } x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}, f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$y = \frac{2(x+1)}{x-1} \text{ 이면}$$

$$yx - y = 2x + 2 \text{ 에서 } x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$$

16. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$$g^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x - 1) = -(3x - 1) + 2 \\ &= -3x + 3 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1) \\ &= (g^{-1} \circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1)) = 0 \end{aligned}$$

17. 함수 $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9

② -9

③ $2a$

④ $2a - 3$

⑤ $-2a + 3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \leq a \leq 2$ 이어야 한다.

$$\text{이 때, } f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$$

$$f(3) = |2| + |1| + |3 - a| = 6 - a$$

$$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$$

18. 다음 중 지나지 않는 사분면이 같은 것끼리 짝지은 것은?

$$\textcircled{\text{㉠}} y = \frac{1}{x-2} - 1$$

$$\textcircled{\text{㉡}} y = \frac{4}{x+2} - 1$$

$$\textcircled{\text{㉢}} y = \frac{2}{x-3} - 1$$

$$\textcircled{\text{㉣}} y = \frac{-2}{x-1} + 1$$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠, ㉢는 제2사분면을 지나지 않는다.

㉡는 모든 사분면을 지난다.

㉣는 제3사분면을 지나지 않는다.

19. $0 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y = \frac{2x-4}{x-4}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. Mm 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$y = \frac{2x-4}{x-4} = \frac{4}{x-4} + 2$$

$$x=0 \text{ 일 때 최대이므로, } M = \frac{4}{0-4} + 2 = 1$$

$$x=2 \text{ 일 때 최소이므로, } m = \frac{4}{2-4} + 2 = 0$$

$$\therefore Mm = 1 \times 0 = 0$$

20. 남학생 3명, 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 여학생 3명 중 적어도 2명이 이웃하게 서는 방법의 수는?

① 144

② 240

③ 432

④ 576

⑤ 720

해설

6명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $6! = 720$

여학생 3명이 이웃하지 않게 서는 방법의 수는 남학생 3명을 세우고, 남학생 3명 사이 및 양끝 4개의 자리에 여학생 3명을 세우는 방법의 수와 같으므로 $3! \times 4! = 144$

따라서 구하는 방법의 수는 $720 - 144 = 576$