1. 다음은 수근이가 중학교에 입학한 첫 날의 일기이다. 밑 줄 친 말 중에서 집합이 될 수 있는 것을 모두 골라라.

> 5월 18일 비온 뒤 갬
> 오늘은 내가 중학교에 입학한 첫 날이다. 교복을 입은 내 모습이 어색해 보였지만, 새로 사귀게 될 ㉠ 멋진 친구들과 선생님을 만날 생각을 하니 기대가 되었다.
> 입학 첫 날이어서 그런지 부모님과 함께 온 학생들도 많았다. 나는 ㉡ 1학년 1반에 배정되었는데, ㉢ 6학년 때 같은 반이었던 친구들도 있었다.
> 선생님은 중학교 생활에 대하여 여러 가지 말씀을 하신 후, 자리를 정해 주셨다. 나는 ㉣ 키가 큰 편이어서 뒤쪽에 앉게 되었는데, 눈이 나빠서 칠판이 잘 보이지 않았다. 내일은 안경을 맞추어야겠다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

'멋진' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
'큰' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

2. 세 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 10\}$, $B = \{x \mid x\text{는 9보다 작은 짝수}\}$, $C = \{x \mid x = 2 \times n, n = 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C \subset A = B$　② $A \subset B \subset C$　③ $B \subset A \subset C$
④ $B = C \subset A$　⑤ $A = C \subset B$

해설

$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $C = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
따라서 $B = C \subset A$ 의 포함 관계가 성립한다.

3. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

보기

$A \subset C,\ B \subset C,\ C \subset E,\ D \subset E$

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다.

② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다.

③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다.

④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다.

⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다.

해설

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다. → $D \subset B,\ B \not\subset D$ 일 수 있다.
④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다. → $E \subset D$ 이면, $D = E$ 이고 $A \subset E$ 이므로 $A \subset D$ 이다.
⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다. → $B = C = E$ 일 수 있다.

4. 두 집합 $A = \{1,\ 6,\ 3,\ a\}$, $B = \{1,\ 5,\ 3,\ b\}$ 이고 $A \subset B$ 일 때, 옳은 것은?

① $b - a = 1$　② $A \neq B$　③ $a = 2$
④ $b \notin A$　⑤ $a = 6$

해설

$A \subset B$ 조건을 만족하기 위해선 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 포함되어야 하므로 $6 = b$이고,
a는 1, 3, 5, 6 중 하나지만 이미 집합 A 에 1, 3, 6 이 존재하므로 $a = 5$ 이고 $A = B$이다.
따라서 $b - a = 6 - 5 = 1$ 이다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 k 개의 홀수를 원소로 갖는 집합의 개수를 a_k 라고 할 때, $a_1 + a_2 + a_3$ 의 값은?

① 35　② 39　③ 44　④ 56　⑤ 59

해설

(i) 1개의 홀수를 원소로 가질 때
1을 원소로 가지고 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-1-2} = 2^3 = 8$
3 또는 5만 원소로 갖는 부분집합의 개수도 마찬가지 방법으로 각각 8이다.
$\therefore a_1 = 8 \times 3 = 24$

(ii) 2개의 홀수를 원소로 가질 때
1, 3을 원소로 가지고, 5를 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-1} = 2^3 = 8$(개)
1, 5 또는 3, 5만 원소로 가지는 부분집합의 개수도 마찬가지 방법으로 각각 8이다.
$\therefore a_2 = 8 \times 3 = 24$

(iii) 3개의 홀수를 원소로 가질 때
1, 3, 5를 원소로 가지는 부분집합의 개수는 $2^{6-3} = 2^3 = 8$
$\therefore a_3 = 8$

$\therefore\ a_1 + a_2 + a_3 = 56$

6. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.
$2^{n-3} = 32$, $2^{n-3} = 2^5$
$n - 3 = 5$ 이므로 $n = 8$

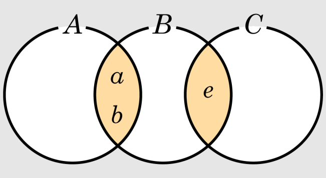
7. 세 집합 A, B, C에 대하여 $A \cap B = \{a, b\}$, $B \cap C = \{e\}$, $C \cap A = \varnothing$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, h\}$, $B \cup C = \{a, b, e, f, g, h\}$일 때, 집합 B를 구하여라.

▶ 답 :

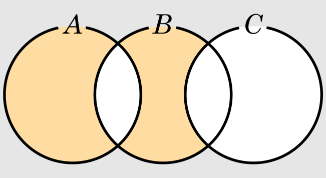
▷ 정답 : $\{a,\ b,\ e,\ h\}$

해설

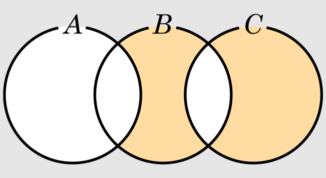
우선 세 조건 $A \cap B = \{a, b\}$, $B \cap C = \{e\}$, $C \cap A = \varnothing$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



다음으로 $A \cup B = \{a, b, c, d, e, h\}$, $B \cup C = \{a, b, e, f, g, h\}$이므로

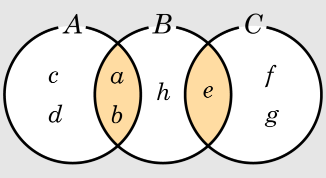


$\rightarrow \{c, d, h\}$



$\rightarrow \{f, g, h\}$

따라서 이상의 조건을 모두 조합하면 집합 A, B, C는 다음과 같다.



그러므로 $B = \{a, b, e, h\}$이다.

8. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 5, 6, 9, 12\}$, $A \cap B = \{6, 9, 12\}$ 가 성립할 때 다음 중 집합 B 가 될 수 <u>없는</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{6, 8, 9, 12\}$ ② $\{6, 8, 9, 10, 12\}$

③ $\{5, 6, 8, 12\}$ ④ $\{1, 5, 6, 9\}$

⑤ $\{6, 9, 12\}$

해설

$\{6, 9, 12\} \subset B \subset \{3, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 이므로 집합 B 는 원소 6, 9, 12 은 반드시 포함하는 집합이다.
따라서 ③, ④ 은 B 가 될 수 없다.

9. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \left\{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_5^2\right\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1,\ a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$

9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.

$A = \{1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10\}$

$B = \{1,\ 9,\ 16,\ 81,\ 100\}$

$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$

10. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$ 이고, 집합 $A\cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$,
$\rightarrow A=B$,
$\rightarrow A\cap B=A=B$,
$A\cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 이므로,
집합 A 의 모든 원소의 합은 10

11. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{1,3,4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 일 때, 집합 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$B = \{1,3,4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 이므로 남은 원소는 2 , 5 이므로 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

12. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고, A, B 의 부분집합의 개수가 각각 16 개, 32 개일 때, $n(A \cap B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

A, B 의 부분집합의 개수가 각각 16 개, 32 개이므로 $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ 이다.
한편 $A \subset B$ 에서 $A \cap B = A$ 이므로
$n(A \cap B) = n(A) = 4$ 이다.
또한 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 5 - 4 = 1$ 이다.
따라서 $n(A \cap B) + n(B - A) = 4 + 1 = 5$ 이다.

13. $U = \left\{x | 0 \leq x < 15,\ x\text{는 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 $A = \left\{x | x\text{는 12 이하의 2의 배수}\right\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 $n\left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\right)$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로
$n\left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\right)$
$= n\left((A - B) \cup (B - A)\right)$
$= n\left(\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}\right) = 10$ 이다.

14. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 <u>아닌</u> 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

15. 다음은 양수 $x,\ y,\ z$가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$
$\therefore P^2 \geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

① $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{3}$ ② $9,\ 3,\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ $3,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{3}$
④ $3,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}$$
$$+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore\ P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because\ x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

16. 함수 f, g가 모두 자연수 n에 대하여 $f(n) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2f(n-1) & (n \neq 1) \end{cases}$

$g(n) = \begin{cases} 3g(n+1) & (n \neq 3) \\ f(n) & (n=3) \end{cases}$ 으로 정의될 때 $g(1)$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 18 ⑤ 36

해설

$$\begin{aligned} g(1) &= 3g(2) = 3[3g(3)] = 3[3f(3)] \\ &= 3[3 \cdot 2f(2)] = 3[3 \cdot 2 \cdot 2f(1)] \\ &= 3[3 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1)] = 36 \end{aligned}$$

17. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,
$\{3, 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3 = 8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2 = 6$
따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

18. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

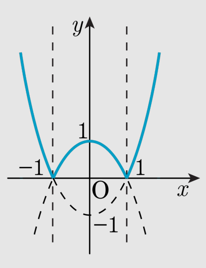
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1,\ x \geq 1$, $x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1(x \leq -1,\ x \geq 1) \\ 1 - x^2(-1 < x < 1) \end{cases}$



$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.

19. $\dfrac{3x^2-2xy}{x^2+xy+y^2}=2$일 때, $\dfrac{3(x-y)}{x+y}$의 값을 구하면? (단, $x>y>0$)

① $2\sqrt{6}+3$ ② $2\sqrt{6}-3$ ③ $3-2\sqrt{6}$
④ $3+2\sqrt{6}$ ⑤ $5-6\sqrt{2}$

해설

$3x^2-2xy=2x^2+2xy+2y^2$

$\therefore x^2-4xy-2y^2=0$이 식의 양변을 y^2으로 나누면

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4\left(\dfrac{x}{y}\right)-2=0$

$\therefore \dfrac{x}{y}=2+\sqrt{6}$ ($\because$ $x>y>0$에서 $\dfrac{x}{y}>1$)

$\therefore \dfrac{3(x-y)}{x+y}=\dfrac{3\left(\dfrac{x}{y}-1\right)}{\dfrac{x}{y}+1}=2\sqrt{6}-3$

20. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 x, 무색생물의 수가 y일 때, $\dfrac{y}{x+y} \times 100(\%)$로 정의된다. 지난 달 수질 검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 20%이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과 지난달에 비해 유색 생물의 수는 2배, 무색생물의 3배가되었다. 이 번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 %인가?

① 약 14.3%　② 약 15.2%　③ 약 17.1%
④ 약 21.3%　⑤ 약 27.3%

해설

지난달 검사 : $\dfrac{y}{x+y} \times 100 = 20 \Rightarrow x = 4y$

이번달 검사 : $\dfrac{3y}{2x+3y} \times 100 = \dfrac{3y}{11y} \times 100 \fallingdotseq 27.3(\%)$

21. $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $\dfrac{x}{x+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x}{x-\sqrt{x-1}}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$　　② $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$　　③ $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

④ $\dfrac{2+3\sqrt{3}}{3}$　　⑤ $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

해설

$\dfrac{x}{x+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x}{x-\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{\left\{(x-\sqrt{x-1})+(x+\sqrt{x-1})\right\}x}{(x+\sqrt{x-1})(x-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{2x^2}{x^2-x+1}$

$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x-1=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=5$

$\therefore\ x^2=x+1$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{2x^2}{x^2-x+1}$

$=\dfrac{2(x+1)}{(x+1)-x+1}=x+1$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+1=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

22. 자신의 영문 이름을 이용하여 이메일 아이디를 만들려고 한다 첫 번째 자리에는 자신의 영문 이름 중 모음을, 두 번째 자리에는 자음을, 세 번째 자리에는 다시 모음을 사용하여 만들 때, 영문 이름이 Lee Soon-shin인 사람이 만들 수 있는 아이디의 개수는? 단, 대소문자의 구분은 없고, 같은 알파벳은 2번 이상 사용하지 않는다.

① 12　② 18　③ 24　④ 30　⑤ 36

해설

두 번째 자리에 올 수 있는 자음의 가지수는 4가지이고,
모음 3가지를 첫 번째 세 번째에 배열하는 방법은 ${}_3P_2$이다.
$\therefore 4 \times {}_3P_2 = 24$

23. 철수네 분단의 학생을 일렬로 세우려고 한다. 철수, 규철, 영희 세 학생 중에서는 철수가 가장 앞에 서고, 영희가 가장 뒤에 선다고 한다. 이 때, 경우의 수가 120일 때 철수네 분단의 학생들의 수는?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

전체를 줄세운 다음 철수, 규철, 영희 세 사람 사이에 순서를 바꾸어 줄서는 경우를 나누어 주면 된다. 철수네 분단의 학생의 수를 n 이라 하면

$\frac{n!}{3!} = 120,$

$n! = 120 \times 3! = (6 \times 5 \times 4) \times (3 \times 2 \times 1) = 6!$

$\therefore\ n = 6$

24. a, b, c, d, e, f 의 여섯 문자로 만든 순열 중 모음의 순서가 알파벳의 순서와 같은 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 360 개

해설

모음 a 와 e 의 순서는 항상 a 가 먼저 오는 경우로 고정되어 있으므로,
a, e 를 a, a 로 보면
a, a, b, c, d, f 로 만드는 순열의 수는
$\frac{6!}{2!} = 360$ (개)

25. 5 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 를 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 1 과 2 사이에 다른 숫자가 2 개 이상 들어가 있는 자연수의 개수는?

① 24　② 36　③ 48　④ 52　⑤ 64

해설

5 개의 숫자로 만들 수 있는 자연수의 개수는 $5!$ (개)
1, 2 가 이웃하는 자연수의 개수는 $2 \times 4!$ (개)
1 과 2 사이에 다른 숫자가 한 개 들어가 있는 자연수의 개수는 $3 \times 2! \times 3!$ (개)
따라서, 구하는 자연수의 개수는
$5! - (2 \times 4! + 3 \times 2! \times 3!) = 36$ (개)

26. 여섯 개의 알파벳 I, L, O, V, E, U 를 일렬로 배열할 때, 적어도 네 개의 알파벳 L, O, V, E가 이웃하여 $LOVE$ 로 나타나지 않는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 714 가지

해설

6 개의 알파벳을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $6!$ 이고 L, O, V, E 을 묶어 일렬로 나열하는 방법의 수,
즉 $LOVE$ 가 나타나는 경우의 수는 $3!$ 이므로
구하는 경우의 수는 $6! - 3! = 720 - 6 = 714$

27. ${}_{1}C_0 +{}_{2} C_1 +{}_{3} C_2 +{}_{4} C_3 + \cdots +{}_{10} C_9$ 의 값과 같은 것은?

① ${}_{11}C_6$ ② ${}_{11}C_7$ ③ ${}_{11}C_8$ ④ ${}_{11}C_9$ ⑤ ${}_{11}C_{10}$

해설

${}_{n}C_{r-1} +{}_{n} C_r ={}_{n+1} C_r$

따라서 ${}_{1}C_0 +{}_{2} C_1 +{}_{3} C_2 +{}_{4} C_3 + \cdots +{}_{10} C_9$

$={}_{3} C_1 +{}_{3} C_2 +{}_{4} C_3 + \cdots +{}_{10} C_9 ={}_{4} C_2 +{}_{4} C_3 + \cdots +{}_{10} C_9$

$\cdots ={}_{11} C_9$

28. 다음은 국제 축구 연맹에서 경기 방식을 설명한 것이다.

· 리그전 : 같은 조에 속한 모든 참가팀이 서로 한 번씩 경기를 하여 순위를 가린다.
· 토너먼트전 : 2 팀씩 조를 나누어 비김 없이 승자끼리 시합하여 최후까지 승리한 팀이 우승한다.

24 개의 팀이 참가한 어느 축구 대회에서 6 개 팀씩 4 개조로 나누어 리그전을 치른 후 각 조의 1 , 2 위인 8 개의 팀이 토너먼트전으로 경기를 하여 우승팀을 가리려 한다. 이 축구 대회에서 우승팀을 가릴 때까지 치르게 되는 총 경기의 수를 구하여라.

▶ 답: ____ 경기

▷ 정답: 67경기

해설

한 조의 여섯 팀이 리그전을 가질 때의 경기 수는

${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ (경기)

따라서, 4 개의 조에서 치르는 리그전의 경기 수는

$15 \cdot 4 = 60$ (경기)

이어 8 개 팀이 토너먼트전으로 치르는 경기의 수는 7 경기이다. 따라서 우승팀을 가릴 때까지 치르게 되는 총 경기의 수는 $60 + 7 = 67$ (경기)이다.

29. A 지역에는 세 곳, B 지역에는 네 곳, C 지역에는 다섯 곳, D 지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

해설

(i) 선택한 세 곳이 모두 A 지역일 경우 : 1 (가지)
(ii) 선택한 세 곳이 모두 B 지역일 경우 :
이는 B 지역의 네 곳 중 세 곳을 선택한 경우와 같다.
${}_4C_3 = 4$ (가지)
(iii) 선택한 세 곳이 모두 C 지역일 경우 :
위와 같은 방법으로 ${}_5C_3 = 10$ (가지)
(iv) 선택한 세 곳이 모두 D 지역일 경우 :
위와 같은 방법으로 ${}_6C_3 = 20$ (가지)
따라서, (i), (ii), (iii), (iv) 에 의하여
$1 + 4 + 10 + 20 = 35$ (가지)

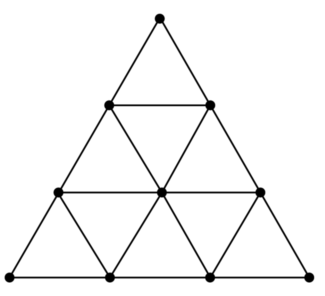
30. 서로 다른 7 개의 과일이 있다. 이 중 빨간 색이 3 개, 노란 색이 2 개, 검은 색이 2 개다. 이 중에서 4 개의 과일을 택할 때, 빨간 색과 노란 색의 과일이 적어도 각각 한 개씩 포함되는 경우의 수는?

① 25　② 27　③ 29　④ 31　⑤ 33

해설

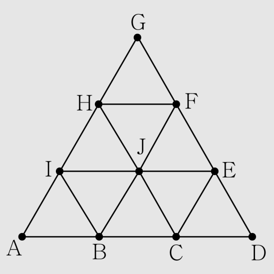
7 개의 과일 중에서 4 개의 과일을 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$ (가지)
이 중에서 빨간 색 과일이 한 개도 없는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$ (가지)
노란 색 과일이 한 개도 없는 경우의 수는 ${}_5C_4 = 5$ (가지)
빨간 색과 노란 색 과일이 한 개도 없는 경우의 수는 0 (가지)
따라서 구하는 경우의 수는 $35 - (1 + 5) = 29$ (가지)

31. 다음 그림과 같은 형태의 정삼각형들의 꼭짓점으로 이루어진 10 개의 점이 있다. 이들 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수는?



① 12 개　② 14 개　③ 18 개　④ 20 개　⑤ 24 개

해설



서로 다른 10 개의 점 중에서 두 점을 택하면
직선이 되므로, ${}_{10}C_2 = 45$, 그런데 위 그림에서
네 점 A, B, C, D 중 어떤 두 점을 택하여
직선을 그려도 모두 동일한 직선이 된다.
A, B, C, D 네 점 중 두 점을 택하는 경우의
수 ${}_4C_2 = 6$ 가지와 I, J, E 세 점 중 두 점을 택하는 경우의 수
${}_3C_2 = 3$ 가지가 각각 동일한 직선이 된다.
다른 두 방향에 대해서도 동일하므로 한 직선이 중복되어 계산된
경우의 수는 $({}_4C_2 + {}_3C_2 - 2) \times 3 = 21$(가지) 이다.
따라서 구하는 직선의 수는 $45 - 21 = 24$(개)

32. 한 평면 위에 있는 서로 다른 6 개의 점 중에서 4 개의 점만 일직선 위에 있다. 이들 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는?

① 8 개　② 9 개　③ 10 개　④ 12 개　⑤ 15 개

해설

6 개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는
${}_6C_2 = 15$
일직선 위에 있는 4 개의 점 중에서 2 개를
택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$
일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은
1 개뿐이므로 서로 다른 직선의 개수는
$15 - 6 + 1 = 10$ (개) 이다.

33. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점은 최대 몇 개인가?

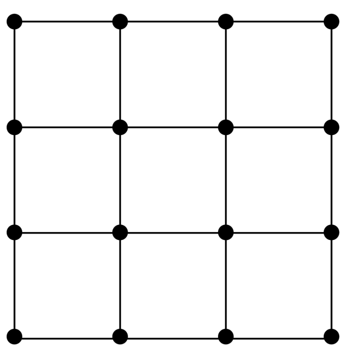
① 125 ② 175 ③ 275 ④ 385 ⑤ 495

해설

십이각형에서 4 개의 점을 선택하면 대각선이 한 개가 만들어진다. 따라서 대각선의 교점의 최댓값은 십이각형의 12 개의 꼭지점에서 4 개의 점을 선택하는 가지 수와 같다.

$\therefore\ {}_{12}C_4 = 495$

34. 그림과 같이 정사각형 모양으로 16개의 점이 있을 때, 이 중 네 점을 연결하여 만들 수 있는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는?



① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

해설

가로줄에서 2 개, 세로줄에서 2 개를 선택하면
직사각형의 수가 되고 여기서 정사각형의 수
(14)를 빼준다 $\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_4C_2 - 14 = 22$

35. 6 명을 세 개의 조로 나누는 방법의 수는?

① 15 ② 30 ③ 60 ④ 90 ⑤ 180

해설

(i) 1, 2, 3 명으로 나누는 경우

: ${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 60$

(ii) 2, 2, 2 명으로 나누는 경우

: ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$

(iii) 1, 1, 4 명으로 나누는 경우

: ${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 15$

(i), (ii), (iii) 에서 구하는 경우의 수는

$60 + 15 + 15 = 90$