1. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a + b$의 값을구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0$ $\therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

2. n이 자연수일 때, x의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots$①
$x=3$을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$
$\therefore\ b=-3a-9\cdots$②
②를 ①에 대입하면
$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$
$\therefore\ (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$
양변을 $x-3$으로 나눈 몫을 비교하면
$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$
$x=3$을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n\ \therefore\ 6+a=1\ \therefore\ a=-5$
②에서 $b=6$
$\therefore\ a=-5,\ b=6\ \therefore\ a+b=1$

3. $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 3이고, 또 (x^2+x+1)로 나누면 나머지가 $2x+4$이다. 이 때, $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 구하면?

① x^2+x+3　② x^2+2x+3　③ $-x^2+x+3$
④ $-x^2+2x+3$　⑤ x^2+3x+1

해설

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$라 하면
$f(x)$를 (x^2+x+1)로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c에서 발생한다.
$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x+4\cdots$㉠
$\therefore\ f(x)=(x^3-1)Q(x)+a(x^2+x+1)+(2x+4)$
그런데 $f(1)=3$이므로 $3a+6=3$
$\therefore$ ㉠에서 $b=1,\ c=3$
따라서, 구하는 나머지는 $-x^2+x+3$

4. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

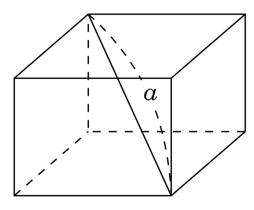
또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$구하는 나머지의 상수항은 2

5. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$ ② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$ ③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$ ⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면
$4(x+y+z) = b$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$
$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b$, $x^2+y^2+z^2 = a^2$
따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(xy+yz+zx) &= (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\\ &= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2\\ &= \frac{1}{16}b^2 - a^2\end{aligned}$$

6. 두 다항식 $x^2 - x + p$ 와 $x^3 + x^2 + x + (p + 3)$ 이 사차의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

다항식 A, B 의 최소공배수를 L , 최대공약수를 G 라 하면
$AB = GL$ 에서 G 는 1차식이다.
$\therefore$ 최대공약수는 $x + 1$
$x = -1$ 을 대입하면
$2 + p = 0$
$\therefore\ p = -2$

7. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 + px + q$를 다항식$g(x) = -x^3 + 2x + q$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하고, $g(x)$ 와 $R(x)$가 $x-1$만을 공통인수로 가질 때, $f(-1)+g(2)$의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$에서
$f(x)$ 와 $g(x)$의 최대공약수는 $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 공통인수가 $x-1$ 이므로
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$
$\therefore f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $x-1$이다.
$f(1) = 3 + p + q = 0 \quad \therefore\ p + q = -3$
$g(1) = 1 + q = 0 \quad \therefore\ q = -1\ \therefore\ p = -2$
$\therefore\ f(x) = x^3+2x^2-2x-1,\ g(x) = -x^3+2x-1 \therefore\ f(-1)+g(2) = 2-5 = -3$

8. 방정식 $ax^2+ibx+c=0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 iz는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-i\bar{z}$는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
$a,\ b,\ c$는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2+ibz+c=0,\ \overline{az^2+ibz+c}=0$
$a\overline{(z^2)}-ib\bar{z}+c=0,$
$a(-\bar{z})^2+ib(-\bar{z})+c=0$이므로
$-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

9. 복소수 $z_1 = 1 - i$에 대하여 $z_{n+1} = \overline{z_n} + (1+i)$이라 하자. $z_{100} = a + bi$라 할 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 실수이고 $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 98　② 99　③ 100　④ 101　⑤ 102

해설

$z_1 = 1 - i$

$z_2 = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i$

$z_3 = 2 - 2i + 1 + i = 3 - i$

$z_4 = 4 + 2i \cdots$

$\Rightarrow z_{2n} = 2n + 2i, z_{2n-1} = (2n-1) - i$ (n 은 자연수)

$\therefore z_{100} = 100 + 2i, a + b = 102$

10. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이 모두 서로 다른 두 허근을 가질 때, $(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$의 근을 판별하면? (단, $ab \neq 0$, $a+b \neq 0$, a,b,c는 실수)

① 중근을 갖는다.

② 두 실근을 갖는다.

③ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

④ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 근을 판별할 수 없다.

해설

$ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이
서로 다른 두 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)$
여기에서 a^2-bc의 부호를 판단하면 되는데
$(b^2-ac)+(c^2-ab)+(a^2-bc)$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geq 0$
㉠, ㉡가 성립하므로 $a^2-bc>0$
$\therefore \frac{D}{4}<0$, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

문제에서 주어진 두 방정식이 각각 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 변변끼리 곱하면
$(bc)^2<a^2bc \cdots$ ㉢
$ac>0, ab>0 \Rightarrow bc>0$
㉢의 양변을 bc로 나누면
$bc<a^2 \quad \therefore a^2-bc>0$
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)<0$
$(\because b^2-ac<0, c^2-ab<0, a^2-bc>0)$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

11. 둘레의 길이가 10 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l 이라고 하면 $2r+l=10$, $l=10-2r$
부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10-2r)$$
$$= -r^2+5r$$
$$= -\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 넓이가 최대가 된다.

12. 삼차다항식 $f(x)$와 이차다항식 $g(x)$가 다음의 세 조건을 만족한다.

> (A) $f(x)$를 $g(x)$로 나누면, 몫이 $x-2$이고 나머지가 $x+6$이다.
> (B) $f(x)-(x-7)g(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
> (C) 방정식 $g(x)=2x+5$의 해는 $-2, 1$이다.

이 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x)=(x-2)g(x)+x+6$이므로 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=-3g(-1)+5 \cdots\cdots$ ㉠
(B)에서 $f(-1)+8g(-1)=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면,
$f(-1)=8,\ g(-1)=-1 \cdots\cdots$ ㉢
(C)에서 $g(x)-(2x+5)=0$의 해가 $-2,\ 1$이므로,
$g(x)-(2x+5)=a(x+2)(x-1)$
$g(x)=a(x+2)(x-1)+2x+5$
㉢에서 $g(-1)=-2a+3=-1$이므로 $a=2$
$\therefore\ g(x)=2x^2+4x+1$
$\therefore\ f(x)=(x-2)g(x)+x+6$
$\quad\quad =2x^3-6x+4=2(x-1)^2(x+2)$
따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것은 -2이다.

13. a, b, c는 실수이고, $a(a+b+c)>0$, $a(b+2a)<0$을 만족시킬 때, ab $\boxed{가}$ 0, $b(a+b+c)$ $\boxed{나}$ 0이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

① $<$, $<$　② $<$, $>$
③ $>$, $>$　④ $>$, $<$
⑤ 결정할 수 없다.

해설

$a(a+b+c)>0$에서 $a\neq 0$, $a+b+c\neq 0$임을 알 수 있다.
한편 $a(b+2a)=ab+2a^2<0$에서 $ab<-2a^2<0$이므로 $ab<0$이다.
또 $ab<0$이므로 $ab(a+b+c)^2<0$에서 $\{a(a+b+c)\}\{b(a+b+c)\}<0$이다.
그런데, $a(a+b+c)>0$이므로 $b(a+b+c)<0$이다.

14. 유리수 a 에 대하여 $\{a\}$ 는 a 를 소수 첫째 자리에서 반올림한 수로 정의할 때, 부등식 $-2 < \left\{\frac{x+1}{3}\right\} < 3$ 을 만족하는 x 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-5.5 < x < 6.5$

해설

$-2 < \left\{\frac{x+1}{3}\right\} < 3$ 에서 $\left\{\frac{x+1}{3}\right\}$ 은 -2 보다 크고 3 보다 작은 정수이므로

$\left\{\frac{x+1}{3}\right\} = -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 이다.

따라서 $-1.5 < \frac{x+1}{3} < 2.5$, $-4.5 < x+1 < 7.5$ 이므로 $-5.5 < x < 6.5$

15. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 $a,\ b,\ c$ 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 8 + c \geq 9$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 6 + c \geq 7$

$\therefore\ b = 8$ 또는 9

1), 2) 에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3,\ b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

16. 볼록한 n 각형의 n 개의 내각 중에서 $n-3$ 개의 각은 모두 $90°$ 이하이고, 나머지 각은 $90°$ 보다 클 때, n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

볼록 n 각형의 내각의 총합은 $180°(n-2)$ 이다.
$n-3$ 개의 각은 모두 $90°$ 이하이고,
나머지 각, 즉 3 개의 각이 둔각이므로
$180°(n-2) < 90°(n-3) + 180° \times 3$
$2(n-2) < n-3+6$
$\therefore\ n < 7$
따라서 n 의 최댓값은 6 이다.

17. 유치원에서 아이들에게 사탕을 한 사람당 3 개씩 나누어주면 25 개가 남고, 4 개씩 나누어 주면 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있다. 이 유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, a 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 26

▷ 정답: 27

▷ 정답: 28

해설

유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, 사탕의 갯수는 $3a+25$ 개이다.

4 개씩 주는 경우 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있으므로

$4(a-1)+1 \le 3a+25 \le 4(a-1)+3$

연립부등식을 풀면 $26 \le a \le 28$ 이므로

$a = 26, 27, 28$ 이다.

18. 장난감을 만드는 완구공장에서 장난감을 만들어 일정한 크기의 상자에 담고 있다. 한 상자에 장난감을 40 개씩 담으면 마지막 상자에는 23 개의 장난감이 들어간다. 불량품인 경우는 상자에 담지 않는다고 한다. 불량품이 49 개 생겨서 한 상자에 34 개씩 담았더니 상자가 부족했고 한 상자에 35 개씩 담았더니 마지막 상자만 가득 차지 않았다고 한다. 이 때 상자의 최소 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

상자의 개수를 x 개라 하면, 장난감의 개수는 $40(x-1)+23 = 40x-17$(개) 이다.
그런데 49 개는 상자에 담지 않았으므로
$40x-17-49 = 40x-66$
$34x < 40x-66 < 35x$
$\therefore 11 < x < 13.2$
따라서 상자의 개수는 12 개 또는 13 개이므로 최소 개수는 12 개이다.

19. 380 명을 한 방에 15 명씩 나누면 방이 모자라고, 한 방에 16 명씩 나누면 몇 개의 방은 16 명 미만의 사람이 들어간다. 만약 방을 6 개 더 배정하면 한 방에 15 명씩 나누어도 80 명이 더 들어갈 수 있다고 할 때, 방의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

방의 개수를 x 개라 하면

$15x < 380 < 16x$

$15(x+6) \leq 380+80$

연립하여 계산하면

$\frac{95}{4} < x \leq \frac{74}{3}$

$23.75 < x \leq 24.66...$

따라서 방의 개수는 24 개이다.

20. 사탕봉지 A, B, C, D, E, F 중 5 개에는 무게가 같은 사탕을 4 개씩 넣었으나, 1 개에는 실수로 사탕을 3 개밖에 넣지 않았다. A, B, C 의 무게의 합은 D, E, F 의 무게의 합보다 크고, B, C, D 의 무게의 합은 A, E, F 의 무게의 합보다 크다. 또한 B 와 F 의 무게의 합은 C 와 E 의 무게의 합보다 클 때, 사탕이 3 개 들어있는 사탕봉지를 찾아라.

▶ 답 :

▷ 정답 : E

해설

6 개의 사탕봉지 A, B, C, D, E, F 의 무게를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면

$a+b+c>d+e+f \cdots$ ㉠

$b+c+d>a+e+f \cdots$ ㉡

$b+f>c+e \cdots$ ㉢

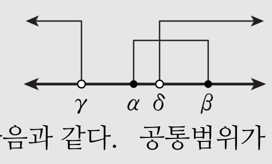
㉠ 과 ㉡ 에서 A 와 D 만 바뀠을 때 부등호의 방향이 변하지 않으므로 A, D 의 사탕봉지의 무게는 같다.

따라서 ㉠ 에서 $b+c>e+f$ 이므로 사탕이 3 개 든 사탕봉지는 E, F 중 하나이고, ㉢ 에 의해 사탕이 3 개 든 사탕봉지는 C, E 중 하나이므로, 사탕이 3 개 들어있는 사탕봉지는 E 이다.

21. 두 부등식 $x^2+ax+b \le 0$, $x^2+x+a>0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $1<x\le 2$ 일 때, ab의 값은?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ -3　　⑤ -4

해설



$x^2+ax+b\le 0$ 의 해를 $\alpha \le x \le \beta$

$x^2+x+a>0$ 의 해를 $x<\gamma$,　$x>\delta$

라 하고

조건에 맞게끔 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.　공통범위가

$1<x\le 2$ 이므로

$\delta=1, \beta=2$ 가 되어야 한다.

$\delta=1$ 이 $x^2+x+a=0$의 근이므로

$1+1+a=0$에서 $a=-2$

$\beta=2$가 $x^2+ax+b=0$의 근이므로

$4+2a+b=0$　$\therefore b=0$

따라서 $ab=0$

22. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

① $2<p-q<5$　② $3\le p-q<5$　③ $3<p-q\le 6$

④ $5\le p-q\le 6$　⑤ $2\le p-q<6$

해설

$f(x)=x^2+x-p$, $g(x)=x^2-3x-q$ 라 하면 방정식 $f(x)=0$ 과 $g(x)=0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x)=x^2+x-p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)-p\le 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)-p>0$$

$$\therefore \frac{3}{4}\le p<\frac{15}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $g(x)=x^2-3x-q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=\frac{3}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}-q\ge 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}-q<0$$

$$\therefore -\frac{9}{4}<q\le -\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡에서 $2\le p-q<6$

23. 좌표평면 위에 세 지점 $P(1,5)$, $Q(-2,-4)$, $R(5,3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$ ② $(0,0)$ ③ $(0,1)$
④ $(1,0)$ ⑤ $(1,1)$

해설

$A(a,\ b)$라고 하면
$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{AP}^2$ $\cdots$ ①
$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{AQ}^2$ $\cdots$ ②
$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{AR}^2$ $\cdots$ ③
$\overline{AP^2}=\overline{AQ}^2=\overline{AR}^2$이므로
①, ② 연립하면 $a+3b=1$
①, ③ 연립하면 $2a-b=2$
$\therefore\ a=1,\ b=0$
$\therefore\ (1,\ 0)$
$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

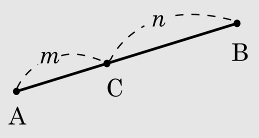
24. 수직선 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m : n$ $(m > n)$ 으로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D 라고 할 때, 다음 식이 성립한다. (　　　)안에 알맞은 값을 구하여라.

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{(\quad)}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

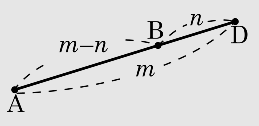


$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}}$

$= (m+n) : m$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$

$= \dfrac{m}{m+n}\overline{\mathrm{AB}}$



$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AD}}$

$= (m-n) : m$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{m}{m-n}\overline{\mathrm{AB}}$

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \dfrac{m+n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} + \dfrac{m-n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} =$

$\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$

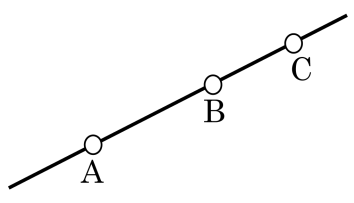
25. 네 점 $A(a,\ 2)$, $B(3,\ 1)$, $C(2,\ -3)$, $D(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되게 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로
$\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.
즉, $\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{3+b}{2},\ \frac{1+(-2)}{2}\right)$에서 $\frac{a+2}{2}=\frac{b+3}{2}$
$\therefore\ a-b=1 \cdots$ ㉠
이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB}=\overline{BC}$이어야 하므로
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서
$(3-a)^2+(1-2)^2=(2-3)^2+(-3-1)^2$
$a^2-6a+10=17$, $a^2-6a-7=0$
$(a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7(\because\ a>0)$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$
$\therefore\ a+b=13$

26. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$)



① $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점

② $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점

③ $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점

④ $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점

⑤ $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각
$\mathrm{A}(-2a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 0),\ \mathrm{C}(a,\ 0)$ (단, $a > 0$)이라 하고
도매상의 위치를 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$$
$$= (x+2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$
$$= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2$$
$$= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a,\ y = 0$ 일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소이고 운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{a},\ 0\right)$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.

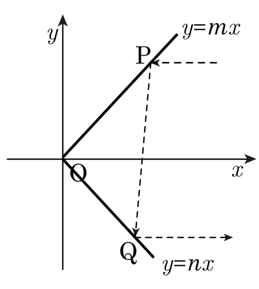
27. 좌표평면 위에서 $2x^2 - 3xy + ky^2 - 3x + y + 1 = 0$이 두 개의 직선을 표시할 수 있도록 k의 값은?

① 1　② -1　③ 3　④ 2　⑤ -2

해설

x에 관해서 정리하면, $2x^2 - (3y+3)x + ky^2 + y + 1 = 0 \cdots$ ㉠
㉠이 두 개의 일차식의 곱으로 표시되어야 하므로
$\mathrm{D} = 9(y+1)^2 - 8(ky^2 + y + 1)$
$= (9-8k)y^2 + 10y + 1$이 완전제곱식이 되어야 한다.
$\therefore \mathrm{D}/4 = 5^2 - (9-8k) = 0$에서 $k = -2$

28. 다음 그림과 같이 x 축의 양의 방향에서 x 축에 평행하게 들어온 빛이 직선 $y = mx$ $(m > 0,\ x > 0)$ 로 표시되는 거울 위의 점 P 에서 반사되고 또한 이 빛은 직선 $y = nx(n < 0,\ x > 0)$ 로 표시되는 거울 위의 점 Q 에서 반사된 후 다시 x 축과 평행하게 진행한다고 할 때, $m \times n$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : -1

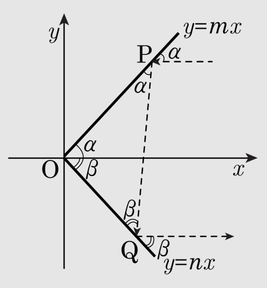
해설

다음 그림에서 입사각과 반사각이 같고 빛이 x 축에 평행하게 들어와서 x 축에 평행하게 반사되어 나가므로

$2\alpha + 2\beta = 180°$

따라서, $\alpha + \beta = 90°$

즉, 두 직선 $y = mx$ 와 $y = nx$ 는 수직이므로 $mn = -1$



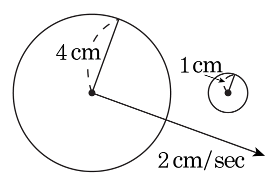
29. 좌표평면 위의 점 $P(4,\ 9)$를 지나고 x절편과 y절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 $P(4,\ 9)$를 지나는 직선의 기울기를
m이라 하면
직선의 방정식은 $y-9=m(x-4)\cdots$ ㉠
x절편 : ㉠에 $y=0$을 대입하면
$-9=m(x-4)$
$\therefore\ x=4-\dfrac{9}{m}$
y절편 : ㉠에 $x=0$을 대입하면
$y-9=-4m$
$\therefore\ y=9-4m$
따라서 x절편, y절편이 모두 정수가 되기위해서는 m의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.
따라서 $m=1,\ 3,\ 9,\ -1,\ -3,\ -9$
$\therefore$ 직선은 6개 존재한다.

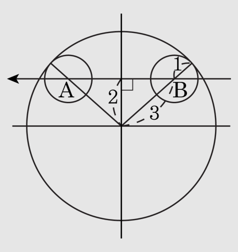
30. 반지름의 길이가 1 cm 인 원에 반지름의 길이가 4 cm 인 원이 초속 2 cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2 cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1 cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4 cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



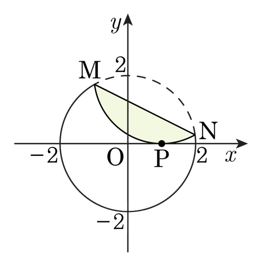
① 1 초　② $\sqrt{2}$ 초　③ $\sqrt{3}$ 초
④ 2 초　⑤ $\sqrt{5}$ 초

해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는 내접해야 하므로,
$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$ 이고,
2 cm/s 로 움직이므로,
$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$(초) 가 된다.



31. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$ 를 현 MN 에서 접었을 때, 호 MN 이 점 P(1, 0) 에서 x 축에 접한다면 직선 MN 의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하라.



▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

주어진 그림의 원에서 $x^2+y^2=4 \cdots$ ①
호 MN을 포함하는 원은 x 축에 접하므로
$x=1$ 위에 중심이 있고, 그 반지름은 2 이다.
$(x-1)^2+(y-2)^2=4 \cdots$ ②
직선 MN 은 두 원 ①, ②의
공통현의 방정식이므로 ① − ②을 하면,
$x^2+y^2-4-\{(x-1)^2+(y-2)^2-4\}=0$
$\therefore\ 2x+4y=5$
$\therefore\ a=2,\ b=4,\ c=-5$
$\therefore\ a+b+c=1$

32. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ 과 중심이 C 인 원 $x^2-4x+y^2=0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\triangle\mathrm{ACP}$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

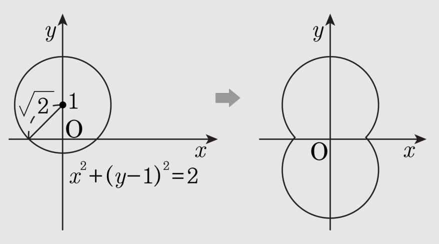
점P (a,b) 는 원 $x^2-4x+y^2=0$
위를 움직이고, 원의 중심 $\mathrm{C}(2,\ 0)$ 과
점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ 에 대하여 P 의 좌표를 $(a,\ b)$,
$\triangle\mathrm{ACP}$ 의 넓이를 n 이라 하면,
$\triangle\mathrm{ACP}=\frac{1}{2}\times4\times|b|=n$ (n 은 자연수, $|b|\le 2$)
$\therefore |b|=\frac{n}{2}$
$n=1,\ \ 2,\ \ 3$ 일 때, 점P 는 각각 4 개씩이고,
$n=4$ 일 때, 점 P 는 2 개
따라서 $\triangle\mathrm{ACP}$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는
점 P 의 개수는 총 14 (개)

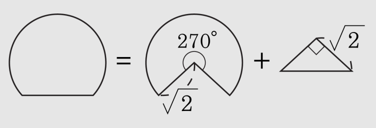
33. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\pi + 1$　　② $\pi + 2$　　③ $3\pi + 1$

④ $3\pi + 2$　　⑤ $3\pi + 4$

해설





(구하는 넓이)

$= \left\{\pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}\right\} \times 2$

$= 3\pi + 2$

34. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a,\ b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = x^2 - 3x \quad \cdots$ ㉠

$y = -x^2 + x + 6 \quad \cdots$ ㉡이라고 하자.

㉠, ㉡이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점P 이다.

㉠ : $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

㉡ : $y = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{25}{4}\right)$

$\therefore$ 중점 $(1,\ 2)$ 이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 이다.

$\therefore\ a = 1,\ b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

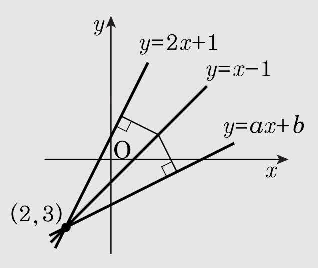
35. 직선 $y = 2x+1$ 을 직선 $y = x-1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x-2y-3=0$　　② $x-2y-4=0$

③ $2x-3y+3=0$　　④ $2x-3y+4=0$

⑤ $2x-3y+5=0$

해설



i) 먼저 $y = 2x+1$ 과$y = x-1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax+b$ 를 지난다.

$\therefore 3 = 2a+b$

ii) 그리고 $y = x-1$ 의 임의의 점에서
$y = 2x+1$,　$y = ax+b$ 에 이르는 거리는 같다.
$y = ax+b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a+0+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

i) 에서 구한
$2a+b=3$ 을 이용하여 연립하면

$a=2$,　$b=1$　또는　$a=\frac{1}{2}$,　$b=-2$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x-2$

($\because$　$y = 2x+1$ 는 두 직선이 일치)