

1. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 3

④ -4

⑤ -3

해설

$$(i) f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$$

$$f(1) = 1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -(a+1)$$

$$(ii) f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$$

$$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$$

$$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$$

$$= (x-1)^2 Q(x)$$

$$\therefore x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } 4 + a = 0 \therefore a = -4$$

$$b = -(a+1) \text{에서 } b = 3$$

$$\therefore a+b = -1$$

2. n 이 자연수일 때, x 의 정식 $x^n(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$ 이 될 때, $a+b$ 의 값은?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-3)^2 Q(x) + 3^n(x-3) \cdots \textcircled{1}$$

$$x=3 \text{을 대입하면 } 3^n(9+3a+b)=0$$

$$\therefore b = -3a - 9 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^n(x^2 + ax - 3a - 9) = (x-3)^2 Q(x) + 3^n(x-3)$$

$$\therefore (x-3)\{x^n(x+a+3)\} = (x-3)\{(x-3)Q(x) + 3^n\}$$

양변을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 비교하면

$$x^n(x+a+3) = (x-3)Q(x) + 3^n$$

$$x=3 \text{을 대입하면 } 3^n(6+a) = 3^n \therefore 6+a=1 \therefore a=-5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b=6$$

$$\therefore a=-5, b=6 \therefore a+b=1$$

3. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누면 나머지가 3이고, 또 (x^2+x+1) 로 나누면 나머지가 $2x+4$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 x^3-1 로 나눈 나머지를 구하면?

① x^2+x+3

② x^2+2x+3

③ $-x^2+x+3$

④ $-x^2+2x+3$

⑤ x^2+3x+1

해설

$f(x) = (x^3-1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 라 하면

$f(x)$ 를 (x^2+x+1) 로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c 에서 발생한다.

$$\therefore ax^2 + bx + c = a(x^2 + x + 1) + 2x + 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(x) = (x^3-1)Q(x) + a(x^2+x+1) + (2x+4)$$

그런데 $f(1) = 3$ 이므로 $3a + 6 = 3$

$$\therefore \textcircled{1} \text{에서 } b = 1, c = 3$$

따라서, 구하는 나머지는 $-x^2 + x + 3$

4. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

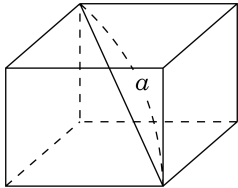
또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

5. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a 이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$

② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$

③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$

④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$

⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x , y , z 라 하면

$$4(x + y + z) = b, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$$

$$\therefore x + y + z = \frac{1}{4}b, x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2$$

$$= \frac{1}{16}b^2 - a^2$$

6. 두 다항식 $x^2 - x + p$ 와 $x^3 + x^2 + x + (p + 3)$ 이 사차의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

다항식 A, B 의 최소공배수를 L , 최대공약수를 G 라 하면
 $AB = GL$ 에서 G 는 1차식이다.

$\therefore$ 최대공약수는 $x + 1$

$x = -1$ 을 대입하면

$$2 + p = 0$$

$$\therefore p = -2$$

7. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 + px + q$ 를 다항식 $g(x) = -x^3 + 2x + q$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 하고, $g(x)$ 와 $R(x)$ 가 $x-1$ 만을 공통인수로 가질 때, $f(-1) + g(2)$ 의 값을 구하면?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \text{에서}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수

$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 공통인수가 $x-1$ 이므로

$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$

$\therefore f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$ 이다.

$$f(1) = 3 + p + q = 0 \quad \therefore p + q = -3$$

$$g(1) = 1 + q = 0 \quad \therefore q = -1 \quad \therefore p = -2$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = -x^3 + 2x - 1 \quad \therefore f(-1) + g(2) = 2 - 5 = -3$$

8. 방정식 $ax^2 + ibx + c = 0$ 에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

- ① z 가 주어진 방정식의 근이면 $\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.
- ② z 가 주어진 방정식의 근이면 $i\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.
- ③ z 가 주어진 방정식의 근이면 iz 는 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.
- ④ z 가 주어진 방정식의 근이면 $-\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.
- ⑤ z 가 주어진 방정식의 근이면 $-i\bar{z}$ 는 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.

해설

z 가 주어진 방정식의 근이라면

a, b, c 는 실수이므로 켈레복소수의 성질을 적용하면

$$az^2 + ibz + c = 0, \overline{az^2 + ibz + c} = 0$$

$$a(\overline{z^2}) - ib\bar{z} + c = 0,$$

$$a(-\bar{z})^2 + ib(-\bar{z}) + c = 0 \text{ 이므로}$$

$-\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.

9. 복소수 $z_1 = 1 - i$ 에 대하여 $z_{n+1} = \bar{z}_n + (1 + i)$ 이라 하자. $z_{100} = a + bi$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 98

② 99

③ 100

④ 101

⑤ 102

해설

$$z_1 = 1 - i$$

$$z_2 = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i$$

$$z_3 = 2 - 2i + 1 + i = 3 - i$$

$$z_4 = 4 + 2i \cdots$$

$$\Rightarrow z_{2n} = 2n + 2i, z_{2n-1} = (2n - 1) - i \quad (n \text{ 은 자연수})$$

$$\therefore z_{100} = 100 + 2i, a + b = 102$$

10. 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ 이 모두 서로 다른 두 허근을 가질 때, $(a+b)x^2 + 2(b+c)x + (c+a) = 0$ 의 근을 판별하면?
(단, $ab \neq 0$, $a+b \neq 0$, a, b, c 는 실수)

- ① 중근을 갖는다.
- ② 두 실근을 갖는다.
- ③ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- ⑤ 근을 판별할 수 없다.

해설

$$ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0 \text{이}$$

서로 다른 두 허근을 가지면

$$b^2 - ac < 0, b^2 < ac \cdots \textcircled{㉠}$$

$$c^2 - ab < 0, c^2 < ab \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(a+b)x^2 + 2(b+c)x + (c+a) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = (b+c)^2 - (a+b)(c+a)$$

$$= (b^2 - ac) + (c^2 - ab) - (a^2 - bc)$$

여기에서 $a^2 - bc$ 의 부호를 판단하면 되는데

$$(b^2 - ac) + (c^2 - ab) + (a^2 - bc)$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{가 성립하므로 } a^2 - bc > 0$$

$$\therefore \frac{D}{4} < 0, \text{ 서로 다른 두 허근을 갖는다.}$$

해설

문제에서 주어진 두 방정식이 각각 허근을 가지면

$$b^2 - ac < 0, b^2 < ac \cdots \textcircled{㉠}$$

$$c^2 - ab < 0, c^2 < ab \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 를 변변끼리 곱하면

$$(bc)^2 < a^2 bc \cdots \textcircled{㉢}$$

$$ac > 0, ab > 0 \Rightarrow bc > 0$$

$\textcircled{㉢}$ 의 양변을 bc 로 나누면

$$bc < a^2 \therefore a^2 - bc > 0$$

$$(a+b)x^2 + 2(b+c)x + (c+a) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = (b+c)^2 - (a+b)(c+a)$$

$$= (b^2 - ac) + (c^2 - ab) - (a^2 - bc) < 0$$

$$(\because b^2 - ac < 0, c^2 - ab < 0, a^2 - bc > 0)$$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

11. 둘레의 길이가 10 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 $2r + l = 10$, $l = 10 - 2r$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10 - 2r) \\ &= -r^2 + 5r \\ &= -\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 넓이가 최대가 된다.

12. 삼차다항식 $f(x)$ 와 이차다항식 $g(x)$ 가 다음의 세 조건을 만족한다.

- (A) $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누면, 몫이 $x-2$ 이고 나머지가 $x+6$ 이다.
 (B) $f(x) - (x-7)g(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.
 (C) 방정식 $g(x) = 2x+5$ 의 해는 $-2, 1$ 이다.

이 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x) = (x-2)g(x) + x+6$ 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $f(-1) = -3g(-1) + 5 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

(B)에서 $f(-1) + 8g(-1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 를 연립하면,

$f(-1) = 8, g(-1) = -1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉢}}$

(C)에서 $g(x) - (2x+5) = 0$ 의 해가 $-2, 1$ 이므로,

$$g(x) - (2x+5) = a(x+2)(x-1)$$

$$g(x) = a(x+2)(x-1) + 2x+5$$

$\textcircled{\text{㉢}}$ 에서 $g(-1) = -2a+3 = -1$ 이므로 $a = 2$

$$\therefore g(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

$$\therefore f(x) = (x-2)g(x) + x+6$$

$$= 2x^3 - 6x + 4 = 2(x-1)^2(x+2)$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근 중 가장 작은 것은 -2 이다.

13. a, b, c 는 실수이고, $a(a+b+c) > 0$, $a(b+2a) < 0$ 을 만족시킬 때,
 ab 가 0, $b(a+b+c)$ 나 0이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

① <, <

② <, >

③ >, >

④ >, <

⑤ 결정할 수 없다.

해설

$a(a+b+c) > 0$ 에서 $a \neq 0$, $a+b+c \neq 0$ 임을 알 수 있다.

한편 $a(b+2a) = ab + 2a^2 < 0$ 에서 $ab < -2a^2 < 0$ 이므로
 $ab < 0$ 이다.

또 $ab < 0$ 이므로 $ab(a+b+c)^2 < 0$ 에서
 $\{a(a+b+c)\} \{b(a+b+c)\} < 0$ 이다.

그런데, $a(a+b+c) > 0$ 이므로 $b(a+b+c) < 0$ 이다.

14. 유리수 a 에 대하여 $\{a\}$ 는 a 를 소수 첫째 자리에서 반올림한 수로 정의할 때, 부등식 $-2 < \left\{ \frac{x+1}{3} \right\} < 3$ 을 만족하는 x 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-5.5 < x < 6.5$

해설

$-2 < \left\{ \frac{x+1}{3} \right\} < 3$ 에서 $\left\{ \frac{x+1}{3} \right\}$ 은 -2 보다 크고 3 보다 작은 정수이므로

$$\left\{ \frac{x+1}{3} \right\} = -1, 0, 1, 2 \text{ 이다.}$$

따라서 $-1.5 < \frac{x+1}{3} < 2.5$, $-4.5 < x+1 < 7.5$ 이므로 $-5.5 < x < 6.5$

15. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 a, b, c 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 8 + c \geq 9$$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 6 + c \geq 7$$

$$\therefore b = 8 \text{ 또는 } 9$$

1), 2)에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3, b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

16. 볼록한 n 각형의 n 개의 내각 중에서 $n-3$ 개의 각은 모두 90° 이하이고, 나머지 각은 90° 보다 클 때, n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

볼록 n 각형의 내각의 총합은 $180^\circ(n-2)$ 이다.

$n-3$ 개의 각은 모두 90° 이하이고,

나머지 각, 즉 3 개의 각이 둔각이므로

$$180^\circ(n-2) < 90^\circ(n-3) + 180^\circ \times 3$$

$$2(n-2) < n-3+6$$

$$\therefore n < 7$$

따라서 n 의 최댓값은 6 이다.

17. 유치원에서 아이들에게 사탕을 한 사람당 3 개씩 나누어주면 25 개가 남고, 4 개씩 나누어 주면 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있다. 이 유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, a 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 28

해설

유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, 사탕의 갯수는 $3a + 25$ 개이다.

4 개씩 주는 경우 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있으므로

$$4(a - 1) + 1 \leq 3a + 25 \leq 4(a - 1) + 3$$

연립부등식을 풀면 $26 \leq a \leq 28$ 이므로

$a = 26, 27, 28$ 이다.

18. 장난감을 만드는 완구공장에서 장난감을 만들어 일정한 크기의 상자에 담고 있다. 한 상자에 장난감을 40 개씩 담으면 마지막 상자에는 23 개의 장난감이 들어간다. 불량품인 경우는 상자에 담지 않는다고 한다. 불량품이 49 개 생겨서 한 상자에 34 개씩 담았더니 상자가 부족했고 한 상자에 35 개씩 담았더니 마지막 상자만 가득 차지 않았다고 한다. 이 때 상자의 최소 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

상자의 개수를 x 개라 하면, 장난감의 개수는 $40(x - 1) + 23 = 40x - 17$ (개)이다.

그런데 49 개는 상자에 담지 않았으므로

$$40x - 17 - 49 = 40x - 66$$

$$34x < 40x - 66 < 35x$$

$$\therefore 11 < x < 13.2$$

따라서 상자의 개수는 12 개 또는 13 개이므로 최소 개수는 12 개이다.

19. 380 명을 한 방에 15 명씩 나누면 방이 모자라고, 한 방에 16 명씩 나누면 몇 개의 방은 16 명 미만의 사람이 들어간다. 만약 방을 6 개 더 배정하면 한 방에 15 명씩 나누어도 80 명이 더 들어갈 수 있다고 할 때, 방의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 24 개

해설

방의 개수를 x 개라 하면

$$15x < 380 < 16x$$

$$15(x + 6) \leq 380 + 80$$

연립하여 계산하면

$$\frac{95}{4} < x \leq \frac{74}{3}$$

$$23.75 < x \leq 24.66\dots$$

따라서 방의 개수는 24 개이다.

20. 사탕봉지 A, B, C, D, E, F 중 5개에는 무게가 같은 사탕을 4개씩 넣었으나, 1개에는 실수로 사탕을 3개밖에 넣지 않았다. A, B, C의 무게의 합은 D, E, F의 무게의 합보다 크고, B, C, D의 무게의 합은 A, E, F의 무게의 합보다 크다. 또한 B와 F의 무게의 합은 C와 E의 무게의 합보다 클 때, 사탕이 3개 들어있는 사탕봉지를 찾아라.

▶ 답 :

▷ 정답 : E

해설

6개의 사탕봉지 A, B, C, D, E, F의 무게를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면

$$a + b + c > d + e + f \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b + c + d > a + e + f \cdots \textcircled{㉡}$$

$$b + f > c + e \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠과 ㉡에서 A와 D만 바꿨을 때 부등호의 방향이 변하지 않으므로 A, D의 사탕봉지의 무게는 같다.

따라서 ㉠에서 $b + c > e + f$ 이므로 사탕이 3개 든 사탕봉지는 E, F 중 하나이고, ㉢에 의해 사탕이 3개 든 사탕봉지는 C, E 중 하나이므로, 사탕이 3개 들어있는 사탕봉지는 E이다.

21. 두 부등식 $x^2 + ax + b \leq 0$, $x^2 + x + a > 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위가 $1 < x \leq 2$ 일 때, ab 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

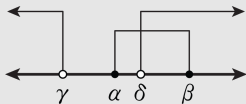
⑤ -4

해설

$x^2 + ax + b \leq 0$ 의 해를 $\alpha \leq x \leq \beta$

$x^2 + x + a > 0$ 의 해를 $x < \gamma$, $x > \delta$

라 하고



조건에 맞게끔 수직선 위에 나타내면 다음과 같다. 공통범위가 $1 < x \leq 2$ 이므로

$\delta = 1, \beta = 2$ 가 되어야 한다.

$\delta = 1$ 이 $x^2 + x + a = 0$ 의 근이므로

$1 + 1 + a = 0$ 에서 $a = -2$

$\beta = 2$ 가 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근이므로

$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = 0$

따라서 $ab = 0$

22. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

- ① $2 < p-q < 5$ ② $3 \leq p-q < 5$ ③ $3 < p-q \leq 6$
 ④ $5 \leq p-q \leq 6$ ⑤ $2 \leq p-q < 6$

해설

$f(x) = x^2 + x - p$, $g(x) = x^2 - 3x - q$ 라 하면 방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x) = x^2 + x - p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - p \leq 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) - p > 0$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq p < \frac{15}{4} \quad \dots\dots\text{㉠}$$

(ii) $g(x) = x^2 - 3x - q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} - q \geq 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - q < 0$$

$$\therefore -\frac{9}{4} < q \leq -\frac{5}{4} \quad \dots\dots\text{㉡}$$

㉠ - ㉡ 에서 $2 \leq p-q < 6$

23. 좌표평면 위에 세 지점 $P(1, 5)$, $Q(-2, -4)$, $R(5, 3)$ 이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0, -1)$

② $(0, 0)$

③ $(0, 1)$

④ $(1, 0)$

⑤ $(1, 1)$

해설

$A(a, b)$ 라고 하면

$$(a-1)^2 + (b-5)^2 = \overline{AP}^2 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$(a+2)^2 + (b+4)^2 = \overline{AQ}^2 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

$$(a-5)^2 + (b-3)^2 = \overline{AR}^2 \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{AR}^2 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 연립하면 } a+3b=1$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ 연립하면 } 2a-b=2$$

$$\therefore a=1, b=0$$

$$\therefore (1, 0)$$

$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

24. 수직선 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m : n$ ($m > n$) 으로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D 라고 할 때, 다음 식이 성립한다. ()안에 알맞은 값을 구하여라.

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{(\quad)}{\overline{AB}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{AB} : \overline{AC}$$

$$= (m + n) : m$$

따라서 $\overline{AC}$

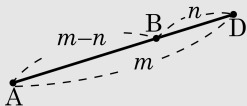
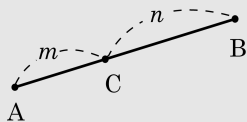
$$= \frac{m}{m + n} \overline{AB}$$

$$\overline{AB} : \overline{AD}$$

$$= (m - n) : m$$

$$\text{따라서 } \overline{AD} = \frac{m}{m - n} \overline{AB}$$

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{m + n}{m} \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{m - n}{m} \frac{1}{\overline{AB}} = \frac{2}{\overline{AB}}$$



25. 네 점 $A(a, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, -3)$, $D(b, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되게 하는 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로

$\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$$\text{즉, } \left(\frac{a+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2} \right) = \left(\frac{3+b}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) \text{에서 } \frac{a+2}{2} = \frac{b+3}{2}$$

$$\therefore a - b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이어야 하므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$(3-a)^2 + (1-2)^2 = (2-3)^2 + (-3-1)^2$$

$$a^2 - 6a + 10 = 17, a^2 - 6a - 7 = 0$$

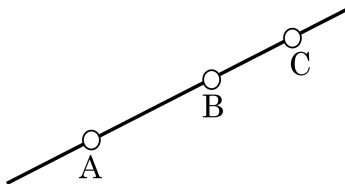
$$(a-7)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 6$

$$\therefore a + b = 13$$

26. 아래 그림과 같이 일직선 위의 세 점 A, B, C 에 소매상이 있고, 어느 한 지점에 도매상을 세우려고 한다. 운반 비용은 도매상에서 각 소매상에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반 비용을 최소로 하는 도매상의 위치는?(단, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$)



- ① $\overline{AB}$ 의 중점
- ② $\overline{BC}$ 의 중점
- ③ $\overline{AC}$ 의 중점
- ④ $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점
- ⑤ $\overline{AC}$ 를 3 : 2 으로 내분하는 점

해설

소매상의 위치를 각각

$A(-2a, 0)$, $B(0, 0)$, $C(a, 0)$ (단, $a > 0$)이라 하고

도매상의 위치를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x + 2a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 \\ &= 3x^2 + 2ax + 3y^2 + 5a^2 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + 3y^2 + \frac{14}{3}a^2 \end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}a$, $y = 0$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소이고
운반 비용도 최소이다.

이 때, 점 $P\left(-\frac{1}{3}a, 0\right)$ 은 $\overline{AB}$ 를 5 : 1 로 내분하는 점이다.

27. 좌표평면 위에서 $2x^2 - 3xy + ky^2 - 3x + y + 1 = 0$ 이 두 개의 직선을 표시할 수 있도록 k 의 값은?

① 1

② -1

③ 3

④ 2

⑤ -2

해설

x 에 관해서 정리하면, $2x^2 - (3y + 3)x + ky^2 + y + 1 = 0 \cdots \textcircled{7}$

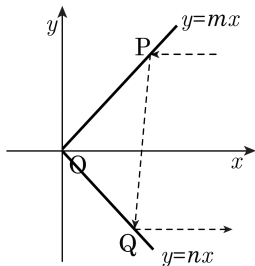
$\textcircled{7}$ 이 두 개의 일차식의 곱으로 표시되어야 하므로

$$D = 9(y + 1)^2 - 8(ky^2 + y + 1)$$

$= (9 - 8k)y^2 + 10y + 1$ 이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\therefore D/4 = 5^2 - (9 - 8k) = 0 \text{에서 } k = -2$$

28. 다음 그림과 같이 x 축의 양의 방향에서 x 축에 평행하게 들어온 빛이 직선 $y = mx$ ($m > 0, x > 0$) 로 표시되는 거울 위의 점 P 에서 반사되고 또한 이 빛은 직선 $y = nx$ ($n < 0, x > 0$) 로 표시되는 거울 위의 점 Q 에서 반사된 후 다시 x 축과 평행하게 진행한다고 할 때, $m \times n$ 의 값을 구하면?

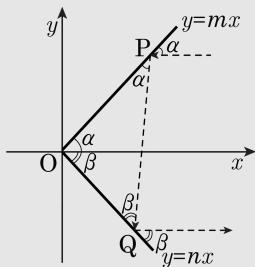


▶ 답 :

▶ 정답 : -1

해설

다음 그림에서 입사각과 반사각이 같고 빛이 x 축에 평행하게 들어와서 x 축에 평행하게 반사되어 나가므로 $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$
 따라서, $\alpha + \beta = 90^\circ$
 즉, 두 직선 $y = mx$ 와 $y = nx$ 는 수직이므로 $mn = -1$



29. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x 절편과 y 절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면

직선의 방정식은 $y - 9 = m(x - 4) \cdots \text{㉠}$

x 절편 : ㉠에 $y = 0$ 을 대입하면

$$-9 = m(x - 4)$$

$$\therefore x = 4 - \frac{9}{m}$$

y 절편 : ㉠에 $x = 0$ 을 대입하면

$$y - 9 = -4m$$

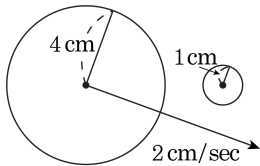
$$\therefore y = 9 - 4m$$

따라서 x 절편, y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.

따라서 $m = 1, 3, 9, -1, -3, -9$

$\therefore$ 직선은 6개 존재한다.

30. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



① 1 초

② $\sqrt{2}$ 초

③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초

⑤ $\sqrt{5}$ 초

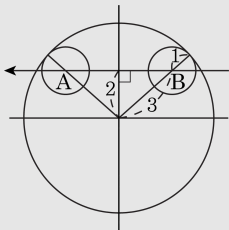
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
내접해야 하므로,

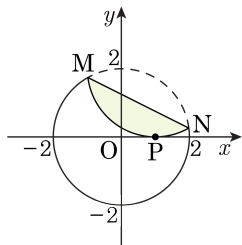
$$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5} \text{ 이고,}$$

2 cm/s로 움직이므로,

$$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}(\text{초}) \text{ 가 된다.}$$



31. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 현 MN 에서 접했을 때, 호 MN 이 점 P(1, 0) 에서 x 축에 접한다면 직선 MN 의 방정식을 $ax + by + c = 0$ 이라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 그림의 원에서 $x^2 + y^2 = 4 \cdots \textcircled{1}$

호 MN 을 포함하는 원은 x 축에 접하므로

$x = 1$ 위에 중심이 있고, 그 반지름은 2 이다.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \cdots \textcircled{2}$$

직선 MN 은 두 원 ①, ②의

공통현의 방정식이므로 ① - ②을 하면,

$$x^2 + y^2 - 4 - \{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4\} = 0$$

$$\therefore 2x + 4y = 5$$

$$\therefore a = 2, b = 4, c = -5$$

$$\therefore a + b + c = 1$$

32. 좌표평면 위의 점 $A(-2, 0)$ 과 중심이 C 인 원 $x^2 - 4x + y^2 = 0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

점 $P(a, b)$ 는 원 $x^2 - 4x + y^2 = 0$

위를 움직이고, 원의 중심 $C(2, 0)$ 과

점 $A(-2, 0)$ 에 대하여 P 의 좌표를 (a, b) ,

$\triangle ACP$ 의 넓이를 n 이라 하면,

$$\triangle ACP = \frac{1}{2} \times 4 \times |b| = n \quad (n \text{ 은 자연수, } |b| \leq 2)$$

$$\therefore |b| = \frac{n}{2}$$

$n = 1, 2, 3$ 일 때, 점 P 는 각각 4 개씩이고,

$n = 4$ 일 때, 점 P 는 2 개

따라서 $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는
점 P 의 개수는 총 14 (개)

33. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\pi + 1$

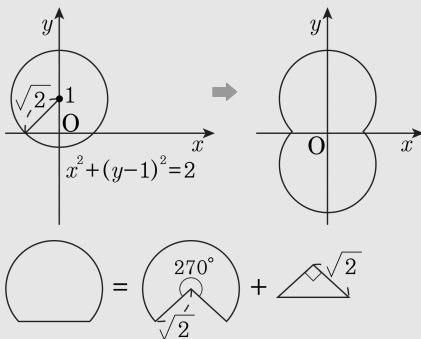
② $\pi + 2$

③ $3\pi + 1$

④ $3\pi + 2$

⑤ $3\pi + 4$

해설



(구하는 넓이)

$$= \left\{ \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right\} \times 2$$

$$= 3\pi + 2$$

34. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a, b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = x^2 - 3x \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = -x^2 + x + 6 \quad \cdots \textcircled{㉡} \text{이라고 하자.}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 이 점 $P(a, b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점 P 이다.

$$\textcircled{㉠} : y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad \text{꼭지점} \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

$$\textcircled{㉡} : y = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad \text{꼭지점} \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

$\therefore$ 중점 $(1, 2)$ 이 점 $P(a, b)$ 이다.

$\therefore a = 1, b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

35. 직선 $y = 2x + 1$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$

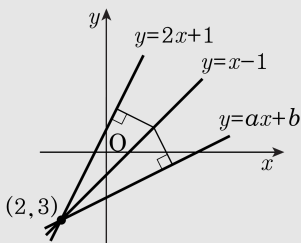
② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y + 3 = 0$

④ $2x - 3y + 4 = 0$

⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과 $y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.

$$\therefore 3 = 2a + b$$

ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서

$y = 2x + 1$, $y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.

$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한

$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면

$$a = 2, b = 1 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 2$$

($\because y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)