1. $\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = k \times 10^{n}$ (단, $0 < k < 10$, n은 자연수)로 나타낼 때, n의 값을 구하면?

① 72　　② 71　　③ 70　　④ 69　　⑤ 68

해설

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = N$이라고 하면

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{15}} < N < \dfrac{10^{85}}{10^{15}}$

$\dfrac{10 \times 10^{84}}{2 \times 10^{15}} < N < \dfrac{10 \times 10^{84}}{10^{15}}$

$5 \times 10^{69} < N < 10 \times 10^{69}$

따라서 $N = k \times 10^{69} (5 < k < 10)$

$\therefore\ n = 69$

2. $a+b=1,\ a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2000}+b^{2006}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a+b=1$에서 $b=1-a$이고 $a^2+b^2=-1$이므로

$a^2+(1-a)^2=-1,\ 2a^2-2a+2=0,\ a^2-a+1=0$

이 식의 양변에 $a+1$을 곱하면

$(a+1)(a^2-a+1)=0,\ a^3+1=0$

같은 방법으로 하면

$b^3+1=0$이므로 $a^3=-1,\ b^3=-1$

$$\begin{aligned}\therefore a^{2000}+b^{2006}&=(a^3)^{666}\cdot a^2+(b^3)^{668}\cdot b^2\\&=a^2+b^2=-1\end{aligned}$$

3. n이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha)=(x-3)\,(x-3)Q(x)+9^n\}$라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha)=(x-3)Q(x)+9^n$이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha)=9^n$

$\therefore\ 3-\alpha=1,\quad \alpha=2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_1(x), R_1$ 이라 하고 $Q_1(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_2(x), R_2$, $\cdots$, $Q_n(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_{n+1}(x), R_{n+1}$ 이라 할 때, $f(x)$ 를 $(x-k)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하면, $R(k)$ 의 값은 얼마인가?

① 0

② kR_1

③ R_1

④ $R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

⑤ $R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_n$

해설

$$f(x) = (x-k)Q_1(x) + R_1$$

$$Q_1(x) = (x-k)Q_2(x) + R_2$$

$$\vdots$$

$$Q_n(x) = (x-k)Q_{n+1}(x) + R_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x) &= (x-k)\{(x-k)Q_2(x) + R_2\} + R_1 \\ &= (x-k)^2 Q_2(x) + (x-k)R_2 + R_1 \\ &= (x-k)^n Q_n(x) + (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ R(x) = (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1$$

$$\therefore\ R(k) = R_1$$

5. 다항식 x^6을 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 나머지는?

① $\frac{1}{64}$ ② $-\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a=-\frac{1}{2}$로 놓으면

$R=a^6$

$x^6=(x-a)Q(x)+a^6$에서

$$Q(x)=\frac{x^6-a^6}{x-a}$$

$$=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$$

$Q(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $Q(a)$의 값과 같으므로 $Q(a)=6a^5$

따라서 $Q\left(-\frac{1}{2}\right)=6\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{3}{16}$

6. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2

④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2-bc=b^2-ac$ 에서 $(a^2-b^2)+(ac-bc)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(a-b)=0 \cdots$ ㉠

$b^2-ac=c^2-ab$ 에서 $(b^2-c^2)+(ab-ac)=0$

$\therefore\ (a+b+c)(b-c)=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$

한편 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 이므로

ⅰ) $a+b+c=0$ 일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

ⅱ) $a=b=c$ 일 때

(준식)$=3a^3-3a^3=0$

따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

7. 두 다항식 $x^2 - x + p$ 와 $x^3 + x^2 + x + p + 3$ 이 사차식의 최소공배수를 갖도록 p의 값을 정하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

다항식 $A,\ B$ 의 최소공배수 L , 최대공약수를 G 라 하면

$AB = GL$ 에서 G 는 1 차식이다. ($\because AB$는 5차식, G는 4차식)

$\therefore$ 최대공약수는 $x+1,\ x+1$은 $x^2 - x + p$ 의 약수이므로

$2 + p = 0$

$\therefore\ p = -2$

8. $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99}+\beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2-\alpha+1=0,\beta^2-\beta+1=0$

두 식에 각각 $\alpha+1,\beta+1$ 를 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0,(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=-1,\beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=(\alpha^3)^{33}+(\beta^3)^{33}=-1-1=-2$

해설

$\alpha+\beta=1,\alpha\beta=1$ 이므로

α,β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$x^2-x+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=(x^3+1)=0$

$\alpha^3=-1,\beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=(\alpha^3)^{33}+(\beta^3)^{33}=-1-1=-2$

9. 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근을 α, β라 한다. $S_n=\alpha^n+\beta^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n=$(가), $S_4+S_3+S_2=$(나)이다. 이 때, (가), (나)에 알맞은 수를 차례로 쓰면?

① 0, 1　② 0, 2　③ 0, 3　④ 1, 1　⑤ 1, 2

해설

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$

$S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n$

$=(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+2(\alpha^n+\beta^n)$

$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+2)+\beta^n(\beta^2+\beta+2)=0$

$(\because \alpha^2+\alpha+2=0,\ \beta^2+\beta+2=0)$

$n=2$를 대입하면 $S_4+S_3+2S_2=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_4+S_3+S_2&=-S_2\\&=-(\alpha^2+\beta^2)\\&=-\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}\\&=-(1-4)=3\end{aligned}$$

10. 다음 세 조건을 만족하는 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$은 몇 개 존재하는가?

(가) a, b, c, d는 100 이하의 서로 다른 자연수이다. (나) c, d는 양의 약수를 3개만 갖는 자연수이다. (다) c, d는 방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 두 근이다.

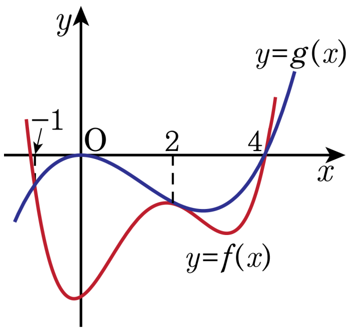
① 1가지　② 2가지　③ 3가지　④ 4가지　⑤ 5가지

해설

양의 약수가 홀수 개인 자연수는 완전제곱수이다.
1이 아닌 어떤 수 a^2에 대하여
약수는 일단 1, a^2, a의 세 개가 있는데
더 이상의 약수가 존재하지 않으면 a는 소수이다.
즉 c, d는 소수의 제곱수로 100 이하이므로
2^2, 3^2, 5^2, 7^2의 네 가지 중에 있다.
조건 (다)에서 $a = c + d$, $b = cd$이고
a, b는 100 이하의 자연수이므로

$$\begin{cases} a = 2^2 + 3^2 \\ b = 2^2 \cdot 3^2 \end{cases}, \begin{cases} a = 2^2 + 5^2 \\ b = 2^2 \cdot 5^2 \end{cases}$$ 의 두 가지

11. 사차방정식 $\frac{1}{3}x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 과 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^2(x-4)=0$ 을 좌표평면에 함수 $f(x)$, $g(x)$ 로 각각 나타내었다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값은?



① -4　　② $-\frac{10}{3}$　　③ -3　　④ $-\frac{7}{3}$　　⑤ -2

해설

$f(x)=g(x)$ 에서 $f(x)-g(x)=0$

$F(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$F(x)=0$은 $x=-1,\ 2$(중근), 4를 근으로 가진다.

$\therefore\ F(x)=k(x+1)(x-2)^2(x-4)$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 이므로 $k=\frac{1}{3}$

$f(x)=F(x)+g(x)$ 이므로

$\frac{1}{3}x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

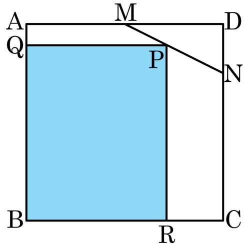
$=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2(x-4)+\frac{1}{3}x^2(x-4)$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$\frac{1}{3}+a+b+c+d=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1\cdot(-3)+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-3)$

$\therefore\ a+b+c+d=-\frac{10}{3}$

12. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정사각형 ABCD 의 변 AD 의 중점을 M , 변 CD 의 사등분점 중 D 에 가장 가까운 점을 N 이라 하고, 선분 MN 위의 한 점 P 에서 변 AB , BC 에 내린 수선을 발을 각각 Q, R라 하자. 직사각형 BRPQ 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{\mathrm{PR}}$ 의 길이를 구하여라.

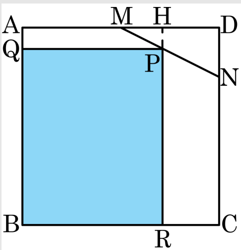


▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{\mathrm{PR}} = x$ 라 하고, 점 P 에서 변 AD 에 선분 PR 의 연장선을 긋고, 점 H 라 하자.



$\overline{\mathrm{HP}} = 4 - x$

$\overline{\mathrm{HP}} : \overline{\mathrm{DN}} = \overline{\mathrm{MH}} : \overline{\mathrm{MD}}$

$(4 - x) : 1 = \overline{\mathrm{MH}} : 2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{MH}} = 8 - 2x$

$\therefore\ \square\mathrm{BRPQ} = x(10 - 2x) = -2x^2 + 10x$

함수 $f(x) = -2x^2 + 10x$ 의 최댓값은 $3 \le x \le 4$ 이므로

$\therefore\ x = 3$ 일 때, 최댓값 12 를 갖는다.

따라서 $\overline{\mathrm{PR}} = 3$ 이다.

13. 연립부등식 $\begin{cases} ax+2 \geq 6+2a \\ x+5 \leq b \end{cases}$ 의 해와 방정식 $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1+x}{2}$ 의 해가 같을때,
a, b의 값을 각각 구한 것은?

① $a=-3,\ b=0$ ② $a=-2,\ b=2$ ③ $a=-1,\ b=4$
④ $a=-4,\ b=6$ ⑤ $a=1,\ b=8$

해설

$\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1+x}{2}$, $x+3=2+2x$
$\therefore x=1$

따라서 부등식의 해가 $x=1$이므로

$ax+2 \geq 6+2a$, $x \geq \dfrac{2a+4}{a}$

$x+5 \leq b$, $x \leq b-5$

$\therefore a=-4,\ b=6$

14. 부등식 $|x-3|+|x-6| \leq 9$ 를 만족하는 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

1) $x < 3$ 일 때

$-(x-3)-(x-6) \leq 9,\ x \geq 0 \qquad \therefore\ 0 \leq x < 3$

2) $3 \leq x < 6$ 일 때

$x-3-(x-6) \leq 9,\ 3 \leq 9$ 따라서 모든 조건이 성립하고 조건이 $3 \leq x < 6$ 이므로

$\therefore\ 3 \leq x < 6$

3) $x \geq 6$ 일 때

$x-3+x-6 \leq 9,\ x \leq 9 \qquad \therefore\ 6 \leq x \leq 9$

1), 2), 3) 에 의해서 주어진 부등식의 해는 $0 \leq x \leq 9$ 이므로 최댓값과 최솟값의 차는

$\therefore\ 9-0=9$

15. 세 자연수의 평균이 5 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 인 세 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 자연수를 각각 x, y, z 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 이므로

$x+y=6k$

$y+z=9k$

$z+x=11k$

각 변끼리 더하면 $x+y+z=13k$

따라서 $x=4k,\ y=2k,\ z=7k$

그런데 세 수의 평균이 5 이하이므로

$\dfrac{x+y+z}{3} \le 5$ 에서 $13k \le 15$

$\therefore\ k \le \dfrac{15}{13}$

k 는 자연수이므로 $k=1$

따라서 $x=4,\ y=2,\ z=7$ 이고,

이 중 가장 큰 수는 7 이다.

16. 분모와 분자의 합이 52 인 기약분수를 소수로 고쳤더니, 정수 부분은 0 이고 소수 첫째 자리는 6 이었다. 이 기약분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{21}{31}$

해설

분모 : x ,

분자 : $52 - x$

$0.6 \le \dfrac{52 - x}{x} < 0.7$

① :

$0.6x \le 52 - x$

$1.6x \le 52$

$x \le \dfrac{52}{1.6}$

$x \le 32.5 \quad \cdots ㉠$

② :

$52 - x < 0.7x$

$52 < 1.7x$

$x > \dfrac{52}{1.7}$

$x > 30.5\cdots \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡ 에서 $30.5\cdots < x \le 32.5$

$x = 31,\ 32$ 일 때 분수는 $\dfrac{21}{31}$, $\dfrac{20}{32}$. 이 중 기약분수는 $\dfrac{21}{31}$ 이다.

17. 어떤 삼각형의 세 변의 길이가 긴 변부터 차례로 $4x+5$, $x+12$, $2x-3$ 이고, 세 변의 길이가 모두 자연수일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 3

해설

삼각형의 세 변의 길이 관계는

(가장 긴 변의 길이) < (다른 두 변의 길이의 합) 이어야 하므로

$4x+5 < (2x-3)+(x+12)$

$\therefore\ x < 4 \cdots$ ㉠

또 변의 길이는 양수이어야 하므로

$2x-3 > 0$

$\therefore\ x > \frac{3}{2} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면

$\frac{3}{2} < x < 4$

세 변의 길이가 모두 자연수이기 위해서 x 는 정수이어야 하므로

$\therefore\ x = 2,\ 3$

18. 어느 실험실의 용기에 100 g 의 소금물이 들어있다. 이 소금물의 농도는 현재 5.5 % 이다. 실험실에 하고자 하는 실험을 위해서는 소금물의 농도가 8 ~ 9 % 정도 유지되어야 한다고 한다. 이 수준을 유지하기 위해 최소 얼마만큼의 물을 증발시켜야 하는지 구하여라.

▶ 답 : ______ g

▷ 정답 : 31.25 g

해설

5.5% 의 농도를 지닌 100 g 의 소금물에 들어있는 소금의 양은

$100 \times \frac{5.5}{100} = 5.5$ g 이다.

증발시켜야 하는 물의 양을 x 라 하면

농도를 8 ~ 9 % 로 유지해야 하므로

$$8 \le \frac{5.5}{100 - x} \times 100 \le 9$$

$$\therefore 31.25 \le x \le \frac{350}{9}$$

따라서 최소 31.25 g 의 물을 증발시켜야 한다.

19. 관희는 집에서 김밥을 50개 만들었다. 아직 앞으로 10개를 더 만 들 수 있는 재료가 남아있는 데, 얼만큼을 더 만들지는 모르겠다고 한다. 김밥은 5개가 들어가는 도시락과 8개가 들어가는 도시락에 나누어 담을 생각이고, 도시락의 수는 10개로 하려고 한다. 김밥이 8개가 들어가는 도시락의 최소의 개수와 최대의 개수를 순서대로 나열한 것으로 옳은 것은?

① 0개 , 1개 ② 0개, 2개 ③ 1개, 2개

④ 0개, 3개 ⑤ 2개, 3개

해설

8개가 들어가는 도시락의 수를 x 개라고 두면 5개가 들어가는 도시락의 수는 $(10-x)$개이다. 이를 이용하여 김밥의 개수를 식으로 나타내면 $8x+5(10-x)$개이다. 김밥의 개수는 최소 50개, 최대 60개가 될 것이므로, $50 \le 8x+5(10-x) \le 60$ 이고 연립방정식으로 나타내면, $\begin{cases} 60 \ge 8x+5(10-x) \\ 8x+5(10-x) \ge 50 \end{cases}$ 이다. 간단히 하면 $\begin{cases} x \le \dfrac{10}{3} \\ x \ge 0 \end{cases}$ 이다. x 의 범위를 나타내면 $0 \le x \le \dfrac{10}{3}$ 이다.

따라서 김밥이 8개 들어가는 도시락의 수는 최소 0개, 최대 3개이다.

20. 560 개의 제품을 적당히 나누어 창고에 보관하려고 한다. 제품을 22 개씩 보관하면 창고가 모자라고 24 개씩 보관하면 모든 제품을 보관할 수 있다. 만약 제품에 불량으로 인해 창고에 보관할 필요가 없게 된 제품이 60 개 발생하면 22 개씩 보관하더라도 창고의 개수를 2 개 더 줄일 수 있다. 창고의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 25 개

해설

창고의 개수를 x 개라 하면

$22x < 560 < 24x$

$22(x-2) \geq 500$

연립하여 계산하면

$$\frac{272}{11} \leq x < \frac{280}{11}$$

$24.72... \leq x < 25.45...$

따라서 창고의 개수는 25 개이다.

21. 6 톤의 물이 들어있는 물탱크에서 1 분에 0.1 톤의 물을 빼내는 양수기를 사용하여 물을 빼내려고 한다. 이 물탱크에는 시간당 일정한 양의 물이 유입된다. 물을 뺀 지 30 분이 지난 후, 남은 물의 양이 전체의 75 % 일 때, 똑같은 양수기를 최소 몇 대 더 사용하여야 물을 빼기 시작한 지 1 시간 이내에 물을 다 뺄 수 있겠는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 대

▷ 정답 : 1대

해설

1 분에 0.1 톤 씩 빼냈을 때, 30 분 동안 빼낸 물의 양은 3 톤이고, 물탱크 안의 물의 양은 6 톤의 75 % , 즉 4.5 톤이므로 30 분 동안 유입된 물의 양은 1.5 톤이다. 따라서 1 분에 0.05 톤의 물이 유입된 것을 알 수 있다.

남은 30 분 동안 4.5 톤의 물을 빼내야 하므로 1 분에 빼내는 물의 양을 x 톤이라 하면

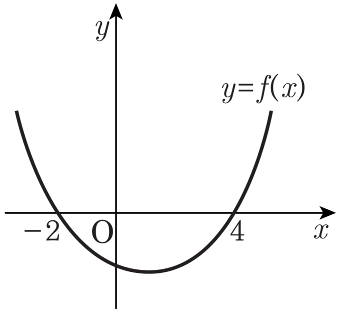
1 분 동안 x 톤의 물을 빠져나가고 0.05 톤의 물이 유입되므로 물탱크에서 줄어드는 물의 양은 $(x-0.05)$ 톤이다.

그런데 30 분 동안 4.5 톤 이상의 물을 빼내야 하므로

$30(x-0.05) \geq 4.5 \quad \therefore x \geq 0.2$

따라서 1 분에 0.2 톤 이상의 물이 빠져나가려면 똑같은 양수기를 최소 1 대 더 사용해야 한다.

22. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x-1) > f(2x)$ 를 만족하는 x 의 값의 범위는?



① $-2 < x < 0$ ② $-1 < x < 1$ ③ $0 < x < 2$

④ $1 < x < 3$ ⑤ $2 < x < 4$

해설

$f(x) = a(x+2)(x-4)$ $(a > 0)$ 로 놓으면

$f(x-1) = a(x+1)(x-5)$

$f(2x) = a(2x+2)(2x-4) = 4a(x+1)(x-2)$

이 때, $f(x-1) > f(2x)$ 에서

$a(x+1)(x-5) > 4a(x+1)(x-2)$

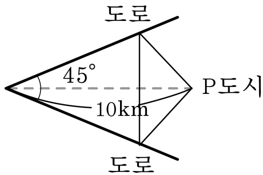
$a(x+1)(x-5-4x+8) > 0$

$a > 0$ 이므로 $(x+1)(-3x+3) > 0$

$3(x+1)(x-1) < 0$

$\therefore\ -1 < x < 1$

23. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$ 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?

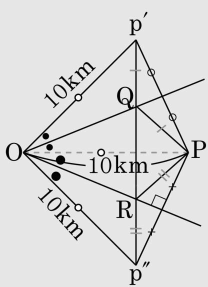


① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km

④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P 의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P', P'' 이라 하면 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''}$ 이고 $\overline{P'P''}$ 가 최단거리가 된다. $\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \quad \therefore \ \overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$



24. 두 점 A , B 에 대하여 선분 AB 를 1 : 2 로 내분하는 점이 P(2, 3) , 1 : 2 로 외분하는 점이 Q(−2, 7) 일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$

해설

$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ 라고 하면
P 는 내분점이고 Q 는 외분점이므로

$$\frac{x_2+2x_1}{1+2}=2,\ \frac{y_2+2y_1}{1+2}=3,$$

$$\frac{-2x_1+x_2}{1-2}=-2,\ \frac{-2y_1+y_2}{1-2}=7$$

위 식을 정리하면,

$2x_1+x_2=6\ \cdots\cdots$ ①

$2y_1+y_2=9\ \cdots\cdots$ ②

$-2x_1+x_2=2\ \cdots\cdots$ ③

$-2y_1+y_2=-7\ \cdots\cdots$ ④

①과 ③으로부터 $2x_2=8$

따라서 $x_2=4$ ①에 대입하면 $x_1=1$

②와 ④로부터 $2y_2=2$

따라서 $y_2=1$ ②에 대입하면 $y_1=4$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$ 이다.

25. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 4), B(0, 0), C(8, -8)에 대하여 $\angle$BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ ② $\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$ ③ $\left(\frac{15}{11}, -\frac{15}{11}\right)$
④ $\left(\frac{25}{13}, -\frac{25}{13}\right)$ ⑤ $\left(\frac{28}{17}, -\frac{28}{17}\right)$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$
$\angle$BAC 의 이등 분선이 선분 BC 와 만나는 교점을 D(x, y) 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$
따라서, 점 D(x, y)는 선분 BC 를 5 : 13 으로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{5 \cdot 8 + 13 \cdot 0}{5 + 13} = \frac{20}{9},$$

$$y = \frac{5 \cdot (-8) + 13 \cdot 0}{5 + 13} = -\frac{40}{18} = -\frac{20}{9}$$

$$\therefore \ \mathrm{D}\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$$

26. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x축, y축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

① $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ ② $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ③ $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

④ $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ⑤ $x^2+3y^2=6$

해설

A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$, P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=3$

$a^2+b^2=9\cdots$ ㉠

P$(x,\ y)$는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x=\dfrac{a}{3},\ y=\dfrac{2b}{3}$

$\therefore\ a=3x,\ b=\dfrac{3y}{2}\cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면 $9x^2+\dfrac{9}{4}y^2=9$

$\therefore\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

27. 직선 $x+y=r$ 에 원 $x^2+y^2=r$ 이 접할 때, 양수 r 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$x^2+y^2=r,\ x+y=r$ 이 접하므로 연립방정식의 해가 중근을 가진다.

$x^2+(r-x)^2=r$, $2x^2-2rx+r^2-r=0$

$D/4=r^2-2(r^2-r)=0$ 에서

$-r^2+2r=0,$

$\therefore\ r=0,\ 2$

따라서 양수 $r=2$

28. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > O, r > O) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} =$ (㉯) $\cdot |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2},\ 1-m^2,\ |a^2-r^2|$
② $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ 1+m^2,\ |a^2-r^2|$
③ $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2},\ 2(1-m^2),\ 2|a^2-r^2|$
④ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ 2(1+m^2),\ 2|a^2-r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ r(1+m^2),\ r|a^2-r^2|$

해설

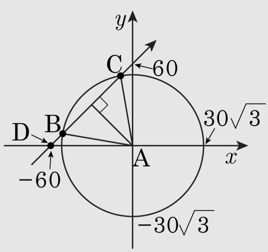
㉢에서 근과 계수와의 관계에서
$\alpha\beta = \dfrac{a^2-r^2}{1+m^2}$
$A(\alpha, m\alpha),\ B(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1+m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$

29. A지점에 있는 레이더화면에는 반경 $30\sqrt{3}km$ 내의 모든 선박이 나타난다고 한다. 지금 A지점의 서쪽 60km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 정방향으로 매시 12km의 속력으로 가고 있다. 이 배는 레이더 화면에 몇 시간 동안 나타나는가?

① 3시간 ② 3시간 30분 ③ 4시간
④ 5시간 ⑤ 6시간

해설

다음 그림에서 A 지점의 위치와 배의 처음 위치를 각각 A(0, 0), D(−60, 0) 이라 하면 배의 진행방향을 나타내는 직선의 방정식은
$y = x + 60$ ($\because$ 북동 정방향이면 직선과 x 축은 $45°$ 의 각을 이루므로 직선의 기울기는 $\tan 45° = 1$ 이다.)



배가 B , C 위치 사이에 있을 때 레이더 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한다.
A(0, 0) 에서 직선 $y = x + 60$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|60|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 30\sqrt{2}$$

중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로

$$\overline{BC} = 2\sqrt{(30\sqrt{3})^2 - (30\sqrt{2})^2} = 60(\text{km})$$

따라서 배의 속력이 12 km/h 이므로
이 배가 레이더 화면에 나타나는 시간은

$$\frac{60}{12} = 5 \text{ (시간) 이다.}$$

30. 원 O : $x^2+y^2=1$, O′ : $(x-4)^2+y^2=4$ 와 직선 l : $\sqrt{3}x-y+4=0$, 점 A$(2, \sqrt{5})$ 에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 원 O 위의 한 점에서 직선 l 에 이르는 거리의 최솟값은 1 이다.

㉡ 점 A 와 원 O′ 위의 한 점 까지의 거리의 최댓값은 5 이다.

㉢ 두 원 O 와 O′ 의 공통외접선의 길이를 α, 공통내접선의 길이를 β 라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은 22 이다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

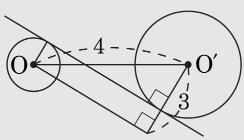
㉠. 최솟값은 원 중심에서 l 까지 거리에서 원 반지름을 뺀 값과 같다

$$\Rightarrow \quad \frac{|4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}-1=1 \text{ (참)}$$

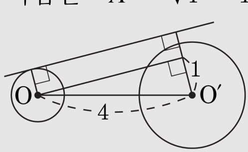
㉡. 최댓값은 $\overline{\mathrm{O'A}}$ 길이에 반지름을 합한 값과 같다.

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}+2=5 \text{ (참)}$$

㉢. 내접선 : $B=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$



외접선 : $A=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$



$\therefore \quad A^2+B^2=22$ (참)

31. 중심이 직선 $y = x(x > 0)$ 위에 있고, 점 $(2,\ 0)$ 을 지나는 원이 있다. 원점에서 이 원 위의 임의의 점까지의 거리의 최대값이 $2\sqrt{2}$ 일 때, 이 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

④ $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$

⑤ $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 20$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로
중심을 $(a,\ a)$ 라고 하자.
원은 반지름이 r 이라고 하면,
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$
$(2,\ 0)$ 을 지나므로,
$(a-2)^2 + a^2 = r^2$
거리의 최대값은 원점에서 중심까지의 거리에
반지름만큼 더한 값이므로,
$2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + a^2} + r = a\sqrt{2} + r$
$\therefore\ r = \sqrt{2} \cdot (2-a)$
위의 $(a-2)^2 + a^2 = r^2$ 에 대입하면
$\therefore\ a = 1 \quad \therefore\ r = \sqrt{2}$
$\therefore\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

32. 두 점 $A(-3,\ 0)$, $B(2,\ 0)$으로부터 거리의 비가 $3:2$인 점을 P라 할 때, $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값을 구하면?

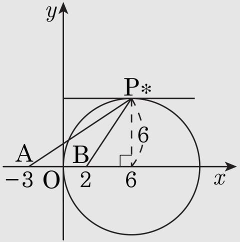
▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

위의 그림과 같이 P 가 P_* 에 있을 때 넓이가 최대가 된다.

$\therefore$ 최댓값은 $\dfrac{1}{2}\times 5\times 6 = 15$ 이다.



33. 두 점 A(−4, 0), B(2, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 도형 위에 점 P 가 존재한다. △ABP 의 넓이의 최대값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

점 P 의 자취는 $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원의 자취이다.

내분점 : $(\dfrac{2\times 2+1\times(-4)}{2+1},\ 0)=(0,0)$

외분점 : $(\dfrac{2\times 2-1\times(-4)}{2-1},\ 0)=(8,0)$

⇒ 중심이 (4, 0) 이고 반지름이 4인 원이다.

⇒ $(x-4)^2+y^2=16$

∴ △ABP 가 최대가 되는 점은

삼각형의 높이가 최대가 되는 점

즉, (4, 4) 또는 (4, −4)

이때의 △ABP 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 6\times 4=12$

34. 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$ 와 $\mathrm{B}(c, d)$ 가 직선 l : $x+y=1$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, a, b, c, d 의 관계식으로 바르게 짝지어진 것은? (단, 두 점 A, B 는 직선 위에 있지 않다.)

㉠ $a+b=c+d$	㉡ $a+c=b+d$
㉢ $a+d=b+c$	㉣ $a+b+c+d=0$
㉤ $a+b+c+d=1$	㉥ $a+b+c+d=2$

① ㉠, ㉣　　② ㉡, ㉤　　③ ㉢, ㉥

④ ㉠, ㉤　　⑤ ㉢, ㉣

해설

두점 AB 가 직선 l 에 대하여 대칭이면

(i) 선분 AB 와 직선 l 은 수직이다.

$$\frac{d-b}{c-a}(-1)=-1$$

$$d-b=c-a$$

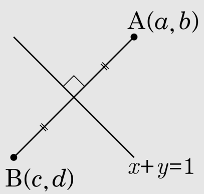
$$a+d=b+c$$

(ii) AB 의 중점 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ 가

직선 l 위에 있다.

$$\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}=1$$

$$\therefore\ a+b+c+d=2$$



35. 정점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$ 과 직선 $y=x+1$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$ 가 최소가 되는 거리는?

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{10}$ ④ $4\sqrt{10}$ ⑤ $5\sqrt{10}$

해설

점$(x,\ y)$ 를 직선 $y=x+k$ 에 대하여
대칭이동하면 $(y-k,\ x+k)$
점 A 의 $y=x+1$ 에 대한 대칭점을 A′ ,
점 A 의 x 축에 대한 대칭점을 A″ 이라 하면
$\mathrm{A'}(1,\ 4),\quad \mathrm{A''}(3,\ -2)$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=$
$\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$ 이므로
한편, $\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$
따라서, 최솟값은 $2\sqrt{10}$