**1.** $x - y = 1$ 이고 $x^2 + y^2 = -1$ 일 때, $x^{10} + y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

① $-1$ ② $0$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $-2$

해설

$x - y = 1$ 에서 $y = x - 1$
이것을 $x^2 + y^2 = -1$ 에 대입하면
$2x^2 - 2x + 2 = 0$
$x^2 - x + 1 = 0$
양변에 $x + 1$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$
$\therefore\ x^3 = -1$
또 $x = y + 1$ 을 $x^2 + y^2 = -1$ 에 대입하면
$2y^2 + 2y + 2 = 0,\ y^2 + y + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^{10} + y^{13} &= (x^3)^3 \cdot x + (y^3)^4 \cdot y \\ &= (-1)^3 \cdot x + 1^4 \cdot y \\ &= -(x - y) = -1\end{aligned}$$

**2.** $x$의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$이 성립할 때, $f(x)$를 구하면? (단, $f(0) = f(1) = f(2) = 0$)

① $f(x) = x(x-1)(x-2)$　　② $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$

③ $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$　　④ $f(x) = x(x-1)(x-2)^2$

⑤ $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

( i ) $f(x)$를 $n$차의 식이라하면
좌변 :$2n$차= 우변 :$n+3$차
$\therefore\ n = 3$

( ii ) $f(x) = kx(x-1)(x-2)$(단, $k \neq 0$)
($\because\ f(0) = f(1) = f(2) = 0$)
좌변 $= kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2$
우변 $= kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
$\therefore\ kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2 = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
$-3k = -(k+2)$
$k = 2$에서 $k = 1$
$\therefore\ f(x) = x(x-1)(x-2)$

**3.** $f(x)=x^2+a$에 대하여 $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어진다. 이 때, $f(0)$를 구하면? (단, $a \neq 0$)

① 2　② −2　③ 0　④ 1　⑤ −1

해설

$f(x)=x^2+a$에서 $f(x^2)=x^4+a$
$f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어지므로
$x^4+a=(x^2+a)Q(x)$
양변에 $x^2=-a$를 대입하면
$a^2+a=0, a(a+1)=0$
$\therefore\ a=-1(\because a\neq 0)$
$f(x)=x^2-1\quad\therefore\ f(0)=-1$

**4.** 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x)-g(x)$ 를 $x^2+1$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 $x^2+1$ 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 $x^2+1$ 로 나눈 나머지가 $2x+4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2f(x)-g(x)=(x^2+1)A(x)+R(x)$

$g(x)=(x^2+1)B(x)+R(x)$ 라 둘 수 있다.

따라서 $2f(x)=g(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$

$=(x^2+1)B(x)+R(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$

$=(x^2+1)\left\{A(x)+B(x)\right\}+2R(x)$

즉, $f(x)=(x^2+1)\frac{1}{2}\left\{A(x)+B(x)\right\}+R(x)$

$\therefore\ R(x)=2x+4$ 이고 $R(10)=24$

**5.** $P(x)=\frac{1}{2}(x-1)$일 때 $\{P(x)\}^{2007}$을 $P(x^2)$으로 나눈 나머지는?

① $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　⑤ $x-1$

해설

$P(x^2)=\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{1}{2}(x-1)(x+1)$

$P(x^2)$이 이차식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라 하면

$\{P(x)\}^{2007}=\frac{1}{2}(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b\cdots$㉠

$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)$에서 $P(1)=0,\ P(-1)=-1$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $a+b=0$

㉠에 $x=-1$을 대입하면 $-a+b=-1$

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ R(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

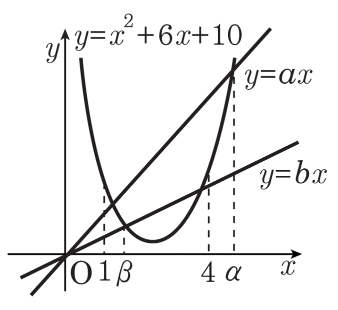
**6.** $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$
② $(b+c)(ab+bc+ca)$
③ $(a+b)(a+b+c)$
④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면
(준식)$=(k-a)(k-b)(k-c)+abc$
$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc+abc$
$=k\left\{k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)\right\}$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ $(\because a+b+c=k)$

**7.** 다음 그림과 같이 $y = x^2 - 6x + 10$ 의 그래프가 직선 $y = ax$ 와 만나는 두 교점이 $x$ 좌표가 각각 $1$, $\alpha$ 이고 직선 $y = bx$ 와 만나는 두 교점의 $x$ 좌표가 각각 $\beta$, $4$ 일 때, $\frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.




▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

방정식 $x^2 - 6x + 10 = ax$

즉, $x^2 - (a + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 $1$, $\alpha$ 이므로

$1 + \alpha = a + 6$

$1 \cdot \alpha = 10$

$\therefore\ \alpha = 10,\ a = 5$

방정식 $x^2 - 6x + 10 = bx$

즉, $x^2 - (b + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 $\beta$, $4$ 이므로

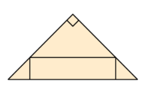
$\beta + 4 = b + 6$

$4 \cdot \beta = 10$

$\therefore\ \beta = \frac{5}{2},\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{10}{\frac{5}{2}} = 10 + 4 = 14$

**8.** 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

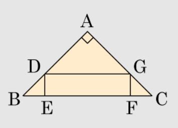


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 $x$ 라 하면
$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45°$ 이므로
$\overline{BE} = x$ 이다.




마찬가지로 $\overline{FC} = x$
$\therefore\ \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$
직사각형의 넓이를 $S$ 라 하면
$S = x(40 - 2x)$
$= -2x^2 + 40x$
$= -2(x - 10)^2 + 200$
따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

**9.** 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 $t$ 초 후의 높이를 $h$ m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$h = 20t - t^2 + 20$$
$$= -(t^2 - 20t) + 20$$
$$= -(t - 10)^2 + 120$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.

**10.** $x$에 관한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,\ f(0)=-1$을 만족한다. 이 때 $ab+cd$의 값은?

① $-5$　　② $-1$　　③ $0$　　④ $1$　　⑤ $5$

**해설**

$x^2-x+1=0$의 두 근 : $\alpha,\ \beta,$

$\alpha+\beta=1\ ,\ \alpha\beta=1$

$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,$

$f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$이므로

$f(x)-x=a(x-\alpha)(x-\beta)\left\{x-(\alpha+\beta)\right\}$

$f(0)=-1\Rightarrow -1=-a\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore a=1(\because \alpha\beta=1, \alpha+\beta=1)$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)+x$

$(\because\ \alpha+\beta=1)$

$f(x)=x^3-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x-\alpha\beta$

$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$a=1, b=-2, c=3, d=-1$

$\therefore\ ab+cd=-2-3=-5$

**11.** 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^2 + bx + a = 0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, 공통근이 아닌 두 근의 합은?

① $-2$ ② $0$ ③ $-1$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

공통근을 $\alpha$라 하면,

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots$ ①

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots$ ②

① − ② : $(a-b)\alpha + (b-a) = 0$, $(a-b)(\alpha-1) = 0$

그런데, 단 하나의 공통근을 갖기 위해서는 $a \neq b$이므로 ($a = b$이면 두식 일치)

$(\alpha - 1) = 0 \quad \therefore \ \alpha = 1$

따라서, 공통근이 아닌 서로 다른 근을 $\beta$, $\gamma$라 하고, 근과 계수와의 관계를 이용하면

$1 + \beta = -a$, $1 + \gamma = -b$

변변 더하면, $2 + (\beta + \gamma) = -(a+b) \cdots$ ①

$1 \cdot \beta = b$, $1 \cdot \gamma = a$

변변 더하면, $\beta + \gamma = (a+b) \cdots$ ②

따라서, ②를 ①에 대입하면

$2 + (\beta + \gamma) = -(\beta + \gamma)$

$2(\beta + \gamma) = -2 \quad \therefore \ \beta + \gamma = -1$

**12.** 방정식 $x^2-12x+35=3^y$ 을 만족하는 정수 $x, y$ 의 순서쌍 $(x, y)$ 에 대하여 $x_1+x_2+y_1+y_2$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x^2-12x+35=(x-6)^2-1=3^y$ 에서 $x-6=t$ 라 하면
$t^2-1=3^y, \quad (t-1)(t+1)=3^y$
따라서, $t+1,\ t-1$ 은 $3^n$ 꼴이고 차가 2이므로 $y=1$ 이다.
$(t+1,\ t-1)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$
$\therefore\ t=2,\ -2 \quad \therefore\ (x,\ y)=(8,\ 1),\ (4,\ 1)$
$\therefore\ x_1+x_2+y_1+y_2=14$

**13.** $a-2b-8<(a+2b)x<5a+4b+2$ 를 만족하는 $x$ 의 범위가 $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 정수 $a$, $b$ 에 대하여 $a\times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-10$

해설

주어진 부등식의 각 변을 $a+2b$ 로 나눌 때,

1) $a+2b>0$ 이면

$$\frac{a-2b-8}{a+2b}<x<\frac{5a+4b+2}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$ 과 같으므로,

$$\frac{a-2b-8}{a+2b}=-\frac{5}{2},\ \frac{5a+4b+2}{a+2b}=\frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=5$ 이고 $a+2b>0$ 을 만족하고 정수이므로 적합하다.

2) $a+2b<0$ 이면

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b}<x<\frac{a-2b-8}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$ 와 같으므로,

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b}=-\frac{5}{2},\ \frac{a-2b-8}{a+2b}=\frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{62}{33}$, $b=-\frac{59}{33}$ 이고 $a$, $b$ 의 값은 정수가 아니므로 적합하지 않다.

따라서 $a=-2$, $b=5$ 이므로 $a\times b=-10$ 이다.

**14.** 부등식 $k-1>\left|\frac{1}{2}x-1\right|$ 의 해가 존재하기 위한 상수 $k$ 의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k>1$

해설

$k-1>\left|\frac{1}{2}x-1\right|$ 에서

$-k+1<\frac{1}{2}x-1<k-1$

$-k+2<\frac{1}{2}x<k$

$-2k+4<x<2k$

이 때, 부등식의 해가 존재하기 위해서는

$-2k+4<2k$

$\therefore\ k>1$

**15.** $5(x-1)$ 을 일의 자리에서 반올림한 값은 $2(x+6)$ 과 같을 때, 정수 $x$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 7

해설

$5(x-1)$을 일의 자리에서 반올림한 값이 $2(x+6)$ 과 같다. 참값 $5(x-1)$ 의 일의 자리에서 반올림하여 얻은 근삿값 $2(x+6)$ 의 오차의 한계는 5 이므로

$2(x+6)-5 \leq 5(x-1) < 2(x+6)+5$

$2(x+6)-5 \leq 5(x-1)$ 에서 $x \geq 4$

$5(x-1) < 2(x+6)+5$ 에서 $x < \dfrac{22}{3}$

$\therefore\ 4 \leq x < \dfrac{22}{3}$

따라서 구하는 정수 $x$ 의 값은 4, 5, 6, 7 이다.

**16.** 커다란 상자 안에 600 개가 안 되는 파란 구슬과 빨간 구슬 개수가 3 : 5 의 비로 들어있다. 여기에 파란 구슬과 빨간 구슬을 $x$ 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었고, 구슬은 총 개수는 650 개를 넘었다. 이 때 $x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

처음의 파란 구슬과 빨간 구슬의 수를 각각 $3y$ 개, $5y$ 개 라 하면 그 합이 600 개가 안 되므로

$3y + 5y < 600 \quad \therefore y < 75$

파란 구슬과 빨간 구슬을 $x$ 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었으므로

$(3y + x) : (5y + x) = 7 : 11 \quad \therefore y = 2x$

구슬이 650 개를 넘었으므로

$(3y + x) + (5y + x) > 650$

$8y + 2x > 650$ 에서 $9y > 650 \quad \therefore y > 72.\times\times\times$

$\therefore 72.\times\times\times < y < 75$

한편 $y = 2x$ 이므로 $y$ 는 짝수이다.

따라서 $y = 74$ 이므로

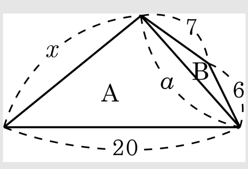
$\therefore x = 37$

**17.** 길이가 각각 6, 7, 20, $x$ 인 선분을 끝점끼리 이어 붙여 볼록한 사각형을 만들 수 있는 $x$ 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $7 < x < 33$

해설




위의 그림과 같이 보조선을 그어 그 길이를 $a$ 라 하자.
삼각형 B 에서 $a < 7 + 6$, 즉 $a < 13$
삼각형 A 에서
1) $x$ 가 가장 긴 변인 경우 : $x < a + 20$
그런데 $a < 13$ 이므로 $x < a + 20 < 13 + 20$
$\therefore\ x < 33$
2) 20 이 가장 긴 변인 경우 : $20 < a + x$
그런데 $a < 13$ 이므로 $20 < a + x < 13 + x$
$\therefore\ x > 7$
따라서 1), 2) 에 의해서 $7 < x < 33$ 이다.

**18.** 반지름의 길이가 1cm 인 원 O 의 바깥쪽에 선분 OA 의 길이가 8cm 인 점 A 가 있다. 원의 중심 O 는 0.4cm/s 의 속도로 직선 OA 를 따라 점 A 쪽 방향으로 움직이고, 원의 반지름은 초당 0.1cm 씩 길어진다고 할 때, 점 A 가 원 O 의 내부에 있게 되는 시간은 몇 초인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▷ 정답 : 16 초

해설

A 가 원 O 의 내부에 $t$ 초 동안 있다고 할 때,
A 가 원 O 의 내부에 있을 조건은
$\overline{\text{OA}} \le$ (원의 반지름의 길이)
이때, $\overline{\text{OA}} = |8 - 0.4t|$ 이므로
$|8 - 0.4t| \le 1 + 0.1t$
1) $8 - 0.4t \ge 0$ 일 때, 즉 $t \le 20$
$8 - 0.4t \le 1 + 0.1t,\ t \ge 14$
$\therefore\ 14 \le t \le 20$
2) $8 - 0.4t < 0$ 일 때, 즉 $t > 20$
$-8 + 0.4t \le 1 + 0.1t,\ t \le 30$
$\therefore\ 20 < t \le 30$
따라서 1), 2) 에 의해서 $14 \le t \le 30$ 이므로 점 A 는 점 O 의 내부에 16 초 동안 들어가게 된다.

**19.** 카드를 카드 상자에 넣으려고 하는데 카드를 10 장씩 넣으면 20 장이 남고, 11 장씩 넣으면 상자가 1 개 남고 어느 상자에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가게 된다. 이 때 카드의 장수로 <u>틀린</u> 것을 모두 골라라.

① 360장 ② 370장 ③ 380장
④ 390장 ⑤ 400장

해설

상자가 $x$ 개 있다고 하면, 카드 수는 $(10x+20)$장이다.
11 장씩 넣을 경우 상자가 1 개가 남고 어느 상자에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가므로, $(x-2)$ 번째까지는 11 장씩 들어가지만 나머지 하나에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가게 된다.
나머지 한 상자에 6 장이 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $11(x-2)+6$ 이고, 8 장이 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $11(x-2)+8$ 이다.
카드 수는 상자에 11 장씩 들어가고 나머지 한 상자에는 6 장이 들어갈 경우보다 같거나 많고 8 장이 들어갈 경우보다 같거나 적으므로 식으로 나타내면 $11(x-2)+6 \le 10x+20 \le 11(x-2)+8$ 이다.

이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 11(x-2)+6 \le 10x+20 \\ 10x+20 \le 11(x-2)+8 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 36 \\ x \ge 34 \end{cases}$ 이다. 그러므로 $x$ 의 범위는 $34 \le x \le 36$ 이다. 따라서 상자는 34 또는 35 또는 36 개가 될 수 있다.
카드의 수는 (상자의 수)$\times 10+20$이므로 360 또는 370 또는 380 장이다.

**20.** 사과를 한 상자에 50 개씩 넣으면 마지막 상자에는 38 개의 사과가 들어간다. 그런데 60 개의 사과가 썩어버려서 버리고, 한 상자에 44 개씩 넣으면 상자가 부족하고, 한 상자에 45 개씩 넣으면 마지막 한 상자만 가득 차지 않을 때, 상자의 갯수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 답: 개

▷ 정답: 13 개

▷ 정답: 14 개

해설

상자의 갯수를 $x$ 개라 하면, 사과의 갯수는 $50(x-1)+38=50x-12$( 개) 이다.
그런데 60 개를 버렸으므로
$50x-12-60=50x-72$
$44x<50x-72<45x$
$\therefore 12<x<14.4$
따라서 상자의 갯수는 13 개, 14 개이다.

**21.** 프로야구 팀 A, B 의 오늘자 승률을 비교해보면, 20 경기를 치른 A 팀의 승률이 14 경기를 치른 B 팀의 승률보다 높았고, 두 팀의 승수의 합은 20 승이었다. 만약 다음 경기부터 양 팀이 6 연승을 달린다면 A 팀과 B 팀의 승률 순위가 바뀐다고 할 때, 오늘자 기록에서 A 팀이 패한 회수를 구하여라. (단, 무승부는 없다.)

▶ 답 : ______ 회

▷ 정답 : 8 회

해설

오늘까지 A 팀이 이긴 경기 수를 $x$ 회라 하면 B 팀이 이긴 경기 수는 $(20-x)$ 회이다.

A 팀의 오늘까지의 승률은 $\frac{x}{20}$ , B 팀의 오늘까지의 승률은 $\frac{20-x}{14}$ 이므로

$\frac{x}{20} > \frac{20-x}{14} \quad \therefore x > \frac{200}{17} \cdots ①$

6 경기를 더 이겼을 때, A 팀의 승률은 $\frac{x+6}{26}$ , B 팀의 승률은 $\frac{26-x}{20}$ 이므로

$\frac{x+6}{26} < \frac{26-x}{20} \quad \therefore x < \frac{278}{23} \cdots ②$

①, ② 의 공통 범위를 구하면

$\frac{200}{17} < x < \frac{278}{23} \quad \therefore 11.\times\times\times < x < 12.\times\times\times$

따라서 $x = 12$ 경기이므로 오늘자 기록에서 A 팀이 패한 횟수는 8 회이다.

**22.** 지연이는 100 원짜리와 500 원짜리 동전으로만 5000 원을 가지고 있다. 100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적을 때, 500 원짜리 동전의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

100 원짜리 동전의 개수를 $x$ 개, 500 원짜리 동전의 개수를 $y$ 개라고 하면,
$100x + 500y = 5000$, $x + 5y = 50$, $x = 5(10 - y)$
100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적다고 하였으므로,
$2y < x < 3y$, $2y < 5(10 - y) < 3y$, $\frac{25}{4} < y < \frac{50}{7}$ 이고, 이를 만족하는 자연수 $y = 7$ 이다.
500 원짜리 동전의 개수는 7 개이다.

**23.** 집에서 학교까지의 거리 중 처음 600m 는 3km/h 의 속도로 걸어가고, 나머지 거리는 6km/h 의 속도로 달려가면, 25 분 이상 30 분 이하의 시간이 걸리는 지역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 : ______ $\text{km}^2$

▷ 정답 : $2.15\pi$ $\text{km}^2$

해설

거리를 $a$km 라 하면

(처음 600m 를 가는 데 걸린 시간)$= \frac{0.6}{3} = 0.2$

(나머지 거리를 가는 데 걸린 시간)$= \frac{a-0.6}{6}$

총 25 분 이상 30 분 이하의 시간이 걸리므로

$\frac{25}{60} \le 0.2 + \frac{a-0.6}{6} \le \frac{30}{60}$

$\therefore\ 1.9 \le a \le 2.4$

따라서 구하는 넓이는 반지름이 2.4 인 원의 넓이에서 반지름이 1.9 인 원의 넓이를 뺀 것이므로

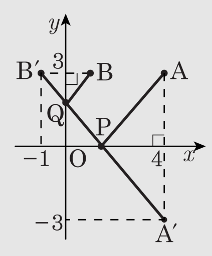
$\therefore\ \pi(2.4)^2 - \pi(1.9)^2 = 5.76\pi - 3.61\pi = 2.15\pi\ (\text{km}^2)$

**24.** 좌표평면 위의 두 점 A(4, 3), B(1, 3) 이 있다. 점 A 에서 $x$축 위의 점과 $y$축 위의 점을 각각 지나 점 B 에 이르는 최단 거리는?

① 5　　② 7　　③ $\sqrt{53}$　　④ $\sqrt{61}$　　⑤ $\sqrt{75}$

해설

점 A 의 $x$축에 대한 대칭점을 A$'$, 점 B 의 $y$ 축에 대한 대칭점을 B$'$
두 점 A$'$, B$'$ 을 지나는 직선이 $x$ 축, $y$ 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라고 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{B'Q}}$
주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 A$'(4, -3)$, B$'(-1, 3)$ 사이의 거리이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$



**25.** 정점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 $\mathrm{P}$ , $x$축 위를 움직이는 동점 $\mathrm{Q}$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$  ② $2\sqrt{5}$  ③ $4\sqrt{3}$  ④ $3\sqrt{7}$  ⑤ $2\sqrt{10}$

**해설**

최솟값은 점 A를 $y = x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 $x$축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.
$y = x$에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}'(2, 4)$
$x$축에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}''(4, -2)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}} \geq \overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}$
$= \sqrt{(2-4)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$

**26.** 평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 O(0, 0), A(2, 0), B(2, 1)에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전중심 P의 좌표는?

① $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$　② $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$　③ $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
④ $P(1, \frac{1}{2})$　⑤ $P(2, \frac{1}{2})$

해설

$P(x,\ y)$ 라고 하면 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 = x^2+y^2+(x-2)^2+y^2+(x-2)^2+(y-1)^2 = 3x^2-8x+3y^2-2y+9 = 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

이 값을 최소가 되게 하는 점 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

**27.** 세 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{C}(4,1)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 $\angle\mathrm{C}$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 $\mathrm{D}(a,b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① 3　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 15

해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ 에서
$\overline{\mathrm{AD}} : \mathrm{BD} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : 1$ 이다.
따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점이므로
$$\mathrm{D}(a,b) = \left(\frac{2\times3+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right) = \left(\frac{8}{3},\ 1\right)$$
$\therefore\ 3ab = 8$

**28.** 정점 $A(-2,\ 3)$과 직선 $y = 2x - 1$ 위의 동점 P를 잇는 선분 $\overline{AP}$ 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

① $y = x + \frac{13}{3}$　② $y = 2x + \frac{13}{3}$　③ $y = 3x + \frac{13}{3}$
④ $y = 4x + \frac{13}{3}$　⑤ $y = 5x + \frac{13}{3}$

**해설**

점 $P(a,\ 2a-1)$, $Q(x,\ y)$라 하면

$$x = \frac{1 \cdot a + 2 \cdot (-2)}{1+2} = \frac{a-4}{3}$$

$$y = \frac{1 \cdot (2a-1) + 2 \cdot 3}{1+2} = \frac{2a+5}{3}$$

여기에서 $a$를 소거하여 $x,\ y$ 의 관계식을 구하면

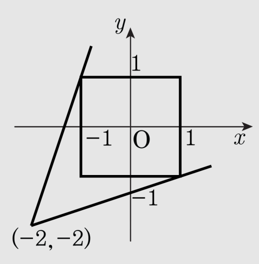
$$\therefore\ y = 2x + \frac{13}{3}$$

**29.** $|x+y|+|x-y|=2$, $kx-y+2k-2=0$을 동시에 만족하는 실수 $x$, $y$가 존재할 때, 실수 $k$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하면, $M+m$의 값은?

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ 5

해설

$|x+y|+|x-y|=2$ 을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다. 한편, $kx-y+2k-2=0$ 은 $k$ 에 관하여 정리하면




$k(x+2)-(y+2)=0$ 이므로 $k$ 의 값에 관계없이 항상 $(-2,-2)$ 를 지나는 직선이다.
두 도형을 동시에 만족하는 실수 $x$, $y$ 가 존재해야 하므로 두 그래프가 만나야 한다.
따라서 $k$ 는 이 직선의 기울기 이므로
직선이 점$(-1,1)$ 을 지날 때, $k$ 는 최대이고
점 $(1,-1)$ 을 지날 때 $k$ 는 최소이다.

$M=3,\ m=\frac{1}{3}$

$\therefore M+m=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

**30.** 임의의 실수 $k$에 대하여 $(x+2y-5)+k(x-y+1)=0$으로 나타내어지는 직선 $l$이 있다. 두 점 $\mathrm{A}(5,\ -11)$, $\mathrm{B}(-4,\ 7)$을 잇는 선분 AB 위의 점으로서 직선 $l$과의 교점이 될 수 없는 점의 좌표는 $(a,\ b)$이다. 이 때, $a+2b$를 구하면?

① $-3$　② $-2$　③ $-1$　④ $0$　⑤ $1$

**해설**

$l\ :\ (x+2y-5)+k\cdot(x-y+1)=0$

점 A와 B를 지나는 직선의 방정식 기울기는

$\dfrac{-11-7}{5+4} = -2$

$y=-2(x-5)-11 = -2x-1 \cdots ㉠$

$\therefore\ 2x+y+1=0$

선분 AB의 경우 $-4 \le x \le 5$에서만 만족

$l$직선에 ㉠을 대입하면

$(x-4x-2-5)+k(x+2x+1+1)=0$

$(-3x-7)+k(3x+2)=0$

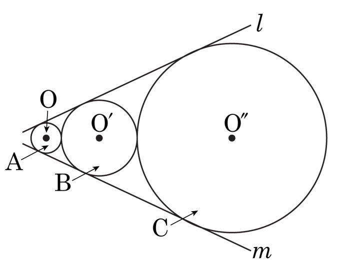
임의의 상수 $k$에 대해서 등식을 만족해야하므로

$x=-\dfrac{2}{3}$일 때 조건에 위배된다.

$y=-2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)-1=\dfrac{1}{3}$

$a+2b=\left(-\dfrac{2}{3}\right)+2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$

**31.** 다음 그림과 같이 두 직선 $l, m$ 에 접하는 세원 A, B, C 가 서로 외접하고 있다. 두 원 A, B 의 반지름의 길이가 각각 2, 5 일 때, 원 C 의 지름의 길이는? (단, 원의 중심은 일직선 위에 있다.)

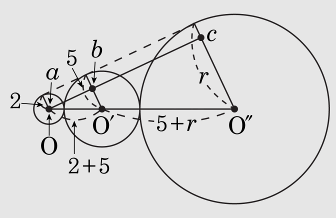


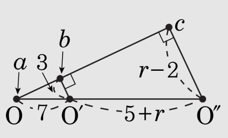

① 15 ② 17 ③ 19

④ 21 ⑤ 25

해설

세 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각해보자. 원 C 의 반지름을 $r$ 이라고 하면, 다음 두 직각삼각형은 닮음이다.



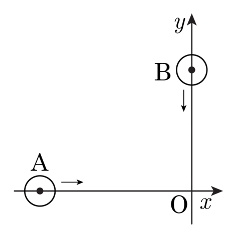

$\therefore \quad (2+5) : 3 = (12+r) : (r-2)$

$\Rightarrow \quad 36 + 3r = 7r - 14$

$\Rightarrow \quad r = 12.5$

$\therefore$ 지름이 25

**32.** 반지름이 1 인 두 원 A, B 가 현재 아래 그림의 위치에 있고, A 의 중심 $(-10, 0)$ 은 $x$ 축 위를 왼쪽에서 오른쪽으로, B 의 중심 $(0, 8)$ 은 $y$ 축 위를 위에서 아래로 매초 1 의 속도로 움직일 때, 원 A, B 가 최초로 접할 때와 두 번째 접할 때 각각의 시간은?




① $t = 2,\ 4$　　② $t = 4,\ 6$　　③ $t = 8,\ 10$

④ $t = 12,\ 14$　　⑤ $t = 16,\ 18$

**해설**

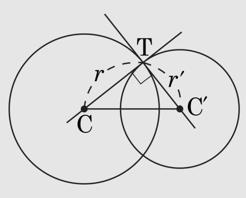
$t$초 후 $A(-10+t,\ 0)$, $B(0,\ 8-t)$에 위치.
$t$ 초 후의 두 원의 중심 사이의 거리를 $d$ 라 하면
$d^2 = (8-t)^2 + (10-t)^2 = 2t^2 - 36t + 164$
접하는 경우는 두 원의 중심 사이의 거리가
두 원의 반지름의 합과 같을 때이므로,
$\sqrt{(8-t)^2 + (10-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 36t + 164} = 2$
$\therefore\ 2t^2 - 36t + 160 = 0$
$\therefore\ t^2 - 18t + 80 = 0$
$\therefore\ t = 8,\ 10$

**33.** 두 원 $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y+c=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2+6x-2y+5=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 교점에서의 접선이 직교할 때 상수 $c$ 의 값은 ?

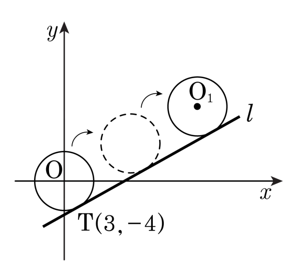
① $-3$ ② $-2$ ③ $3$ ④ $2$ ⑤ $1$

해설

㉠ 에서 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-c$ 이므로
원 ㉠ 의 중심은 $\mathrm{C}(-1,\ -2)$,
반지름의 길이 $r=\sqrt{5-c}$,
㉡에서 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$ 이므로
원 ㉡ 의 중심은 $\mathrm{C'}(-3,\ 1)$,
반지름의 길이 $r'=\sqrt{5}$
따라서, $\overline{\mathrm{CC'}}^2=13$ 이고 그림에서
$\overline{\mathrm{CT}}^2+\overline{\mathrm{C'T}}^2=\overline{\mathrm{CC'}}^2$ 이므로
$r^2+r'^2=\overline{\mathrm{CC'}}^2$
$\therefore\ 5-c+5=13$
$\therefore\ c=-3$



**34.** 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T(3, –4) 에서 직선 $l$ 에 접하고 있다. 직선 $l$ 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 $O_1$ 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?




① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 $l$ 이 점 T(3, –4) 에서 원 O 와 접하므로
직선 OT 와 직선 $l$ 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 $l$ 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 $O_1$ 의 중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이므로

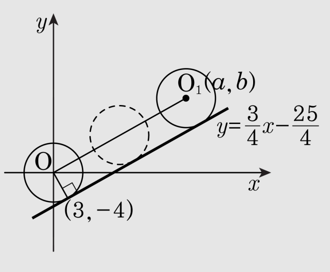
$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 $OO_1$ 의 기울기와 같고,

직선 $OO_1$ 과 직선 $l$ 은 서로 평행하다.

$\fallingdotseq \frac{b}{a}$(직선 $OO_1$ 의 기울기)

= (직선 $l$ 의 기울기)

$= \frac{3}{4}$




직선 $l$ 의 방정식은 $y-(-4) = \frac{3}{4}(x-3)$

$\therefore\ y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$

**35.** 두 원 $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$ 이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이 될 때, $ab$ 의 값을 구하여라.(단, $a, b$ 는 상수)

▶ 답 :

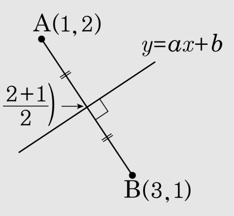
▷ 정답 : $-5$

해설

두 원의 방정식은 각각 $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$ , $(x-3)^2+(y-1)^2 = 1$ 이므로

두 원의 중심 $(1,\ 2)$, $(3,\ 1)$ 이 직선 $y = ax+b$ 에 대하여 대칭이 되어야 한다.

즉, $M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$




$\frac{1-2}{3-1} \times a = -1$

$\therefore\ a = 2$

선분AB 의 중심

$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ 이 직선 $y = ax+b$ 위에 있으므로

$\frac{2+1}{2} = 2 \cdot \frac{1+3}{2} + b$

$\therefore b = -\frac{5}{2}$

따라서, $ab = -5$