1. $x-y=1$이고 $x^2+y^2=-1$일 때, $x^{10}+y^{13}$의 값은 얼마인가?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x-y=1$에서 $y=x-1$

이것을 $x^2+y^2=-1$에 대입하면

$2x^2-2x+2=0$

$x^2-x+1=0$

양변에 $x+1$을 곱하면, $x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=-1$

또 $x=y+1$을 $x^2+y^2=-1$에 대입하면

$2y^2+2y+2=0,\ y^2+y+1=0\ \therefore\ y^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^{10}+y^{13}&=(x^3)^3\cdot x+(y^3)^4\cdot y\\&=(-1)^3\cdot x+1^4\cdot y\\&=-(x-y)=-1\end{aligned}$$

2. x의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$이 성립할 때, $f(x)$를 구하면? (단, $f(0)=f(1)=f(2)=0$)

① $f(x)=x(x-1)(x-2)$
② $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$
③ $f(x)=x(x-1)^2(x-2)$
④ $f(x)=x(x-1)(x-2)^2$
⑤ $f(x)=x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

(i) $f(x)$를 n차의 식이라하면

좌변 :$2n$차$=$우변 :$n+3$차

$\therefore\ n=3$

(ii) $f(x)=kx(x-1)(x-2)$(단, $k\neq 0$)

$(\because\ f(0)=f(1)=f(2)=0)$

좌변 $=kx^6-3kx^4+2kx^2$

우변 $=kx^6-(k+2)x^4+2x^2$

$\therefore\ kx^6-3kx^4+2kx^2=kx^6-(k+2)x^4+2x^2$

$-3k=-(k+2)$

$k=2$에서 $k=1$

$\therefore\ f(x)=x(x-1)(x-2)$

3. $f(x)=x^2+a$에 대하여 $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어진다. 이 때, $f(0)$를 구하면? (단, $a \neq 0$)

① 2 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x)=x^2+a$에서 $f(x^2)=x^4+a$
$f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어지므로
$x^4+a=(x^2+a)Q(x)$
양변에 $x^2=-a$를 대입하면
$a^2+a=0, a(a+1)=0$
$\therefore\ a=-1(\because a \neq 0)$
$f(x)=x^2-1 \quad \therefore\ f(0)=-1$

4. 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 $2f(x)-g(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지 $R(x)$는 $g(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $2x+4$일 때, $R(10)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2f(x)-g(x)=(x^2+1)A(x)+R(x)$

$g(x)=(x^2+1)B(x)+R(x)$라 둘 수 있다.

따라서 $2f(x)=g(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$

$=(x^2+1)B(x)+R(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$

$=(x^2+1)\left\{A(x)+B(x)\right\}+2R(x)$

즉, $f(x)=(x^2+1)\dfrac{1}{2}\left\{A(x)+B(x)\right\}+R(x)$

$\therefore\ R(x)=2x+4$이고 $R(10)=24$

5. $P(x)=\frac{1}{2}(x-1)$ 일 때 $\{P(x)\}^{2007}$ 을 $P(x^2)$ 으로 나눈 나머지는?

① $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ⑤ $x-1$

해설

$P(x^2)=\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{1}{2}(x-1)(x+1)$

$P(x^2)$ 이 이차식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ 라 하면

$\{P(x)\}^{2007}=\frac{1}{2}(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b\cdots$ ㉠

$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)$ 에서 $P(1)=0,\ P(-1)=-1$

㉠에 $x=1$ 을 대입하면 $a+b=0$

㉠에 $x=-1$ 을 대입하면 $-a+b=-1$

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ R(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

6. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$

② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$

④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면

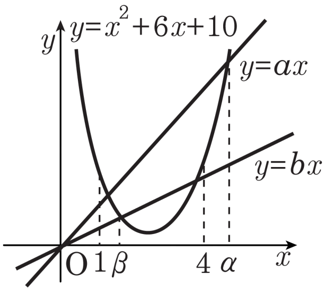
(준식)$=(k-a)(k-b)(k-c)+abc$

$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc+abc$

$=k\left\{k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)\right\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)\ (\because a+b+c=k)$

7. 다음 그림과 같이 $y=x^2-6x+10$ 의 그래프가 직선 $y=ax$ 와 만나는 두 교점이 x 좌표가 각각 1, α 이고 직선 $y=bx$ 와 만나는 두 교점의 x 좌표가 각각 β, 4 일 때, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

방정식 $x^2-6x+10=ax$

즉, $x^2-(a+6)x+10=0$ 의 두 근이 1, α 이므로

$1+\alpha=a+6$

$1\cdot\alpha=10$

$\therefore\ \alpha=10,\ a=5$

방정식 $x^2-6x+10=bx$

즉, $x^2-(b+6)x+10=0$ 의 두 근이 β, 4 이므로

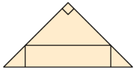
$\beta+4=b+6$

$4\cdot\beta=10$

$\therefore\ \beta=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ \frac{a}{b}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5}{\frac{1}{2}}+\frac{10}{\frac{5}{2}}=10+4=14$$

8. 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

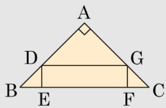


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 x 라 하면
$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45°$ 이므로
$\overline{BE} = x$ 이다.



마찬가지로 $\overline{FC} = x$
$\therefore\ \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$
직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= x(40 - 2x) \\ &= -2x^2 + 40x \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

9. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$
\begin{aligned}
h &= 20t - t^2 + 20 \\
&= -(t^2 - 20t) + 20 \\
&= -(t-10)^2 + 120
\end{aligned}
$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.

10. x에 관한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,\ f(0)=-1$을 만족한다. 이 때 $ab+cd$의 값은?

① -5　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 5

해설

$x^2-x+1=0$의 두 근 : $\alpha,\ \beta,$

$\alpha+\beta=1\ ,\ \alpha\beta=1$

$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,$

$f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$이므로

$f(x)-x=a(x-\alpha)(x-\beta)\left\{x-(\alpha+\beta)\right\}$

$f(0)=-1 \Rightarrow -1=-a\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore a=1(\because \alpha\beta=1, \alpha+\beta=1)$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)+x$

$(\because\ \alpha+\beta=1)$

$f(x)=x^3-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x-\alpha\beta$

$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$a=1, b=-2, c=3, d=-1$

$\therefore\ ab+cd=-2-3=-5$

11. 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^2 + bx + a = 0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, 공통근이 아닌 두 근의 합은?

① -2 ② 0 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통근을 α라 하면,

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots$ ①

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots$ ②

① − ② : $(a-b)\alpha + (b-a) = 0,\ \ (a-b)(\alpha-1) = 0$

그런데, 단 하나의 공통근을 갖기 위해서는 $a \neq b$이므로 ($a = b$ 이면 두식 일치)

$(\alpha - 1) = 0 \quad \therefore\ \alpha = 1$

따라서, 공통근이 아닌 서로 다른 근을 $\beta,\ \gamma$라 하고, 근과 계수와의 관계를 이용하면

$1 + \beta = -a,\ 1 + \gamma = -b$

변변 더하면, $2 + (\beta + \gamma) = -(a + b) \cdots$ ①

$1 \cdot \beta = b,\ \ 1 \cdot \gamma = a$

변변 더하면, $\beta + \gamma = (a + b) \cdots$ ②

따라서, ②를 ①에 대입하면

$2 + (\beta + \gamma) = -(\beta + \gamma)$

$2(\beta + \gamma) = -2 \quad \therefore\ \beta + \gamma = -1$

12. 방정식 $x^2-12x+35=3^y$을 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)에 대하여 $x_1+x_2+y_1+y_2$의 값을 구하면?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x^2-12x+35=(x-6)^2-1=3^y$에서 $x-6=t$라 하면

$t^2-1=3^y, \quad (t-1)(t+1)=3^y$

따라서, $t+1,\ t-1$은 3^n꼴이고 차가 2이므로 $y=1$이다.

$(t+1,\ t-1)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ t=2,\ -2 \quad \therefore\ (x,\ y)=(8,\ 1),\ (4,\ 1)$

$\therefore\ x_1+x_2+y_1+y_2=14$

13. $a-2b-8 < (a+2b)x < 5a+4b+2$ 를 만족하는 x 의 범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 정수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 부등식의 각 변을 $a+2b$ 로 나눌 때,

1) $a+2b>0$ 이면

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} < x < \frac{5a+4b+2}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 과 같으므로,

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{5a+4b+2}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=5$ 이고 $a+2b>0$ 을 만족하고 정수이므로 적합하다.

2) $a+2b<0$ 이면

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} < x < \frac{a-2b-8}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 와 같으므로,

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{a-2b-8}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{62}{33}$, $b=-\frac{59}{33}$ 이고 a, b 의 값은 정수가 아니므로 적합하지 않다.

따라서 $a=-2$, $b=5$ 이므로 $a \times b = -10$ 이다.

14. 부등식 $k-1 > \left|\frac{1}{2}x-1\right|$ 의 해가 존재하기 위한 상수 k 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k > 1$

해설

$k-1 > \left|\frac{1}{2}x-1\right|$ 에서

$-k+1 < \frac{1}{2}x-1 < k-1$

$-k+2 < \frac{1}{2}x < k$

$-2k+4 < x < 2k$

이 때, 부등식의 해가 존재하기 위해서는

$-2k+4 < 2k$

$\therefore\ k > 1$

15. $5(x-1)$ 을 일의 자리에서 반올림한 값은 $2(x+6)$ 과 같을 때, 정수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 7

해설

$5(x-1)$ 을 일의 자리에서 반올림한 값이 $2(x+6)$ 과 같다. 참값 $5(x-1)$ 의 일의 자리에서 반올림하여 얻은 근삿값 $2(x+6)$ 의 오차의 한계는 5 이므로

$2(x+6)-5 \leq 5(x-1) < 2(x+6)+5$

$2(x+6)-5 \leq 5(x-1)$ 에서 $x \geq 4$

$5(x-1) < 2(x+6)+5$ 에서 $x < \dfrac{22}{3}$

$\therefore\ 4 \leq x < \dfrac{22}{3}$

따라서 구하는 정수 x 의 값은 4, 5, 6, 7 이다.

16. 커다란 상자 안에 600 개가 안 되는 파란 구슬과 빨간 구슬 개수가 3 : 5 의 비로 들어있다. 여기에 파란 구슬과 빨간 구슬을 x 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었고, 구슬은 총 개수는 650 개를 넘었다. 이 때 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

처음의 파란 구슬과 빨간 구슬의 수를 각각 $3y$ 개, $5y$ 개 라 하면 그 합이 600 개가 안 되므로

$3y + 5y < 600 \quad \therefore y < 75$

파란 구슬과 빨간 구슬을 x 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었으므로

$(3y + x) : (5y + x) = 7 : 11 \quad \therefore y = 2x$

구슬이 650 개를 넘었으므로

$(3y + x) + (5y + x) > 650$

$8y + 2x > 650$ 에서 $9y > 650 \quad \therefore y > 72.\times\times\times$

$\therefore 72.\times\times\times < y < 75$

한편 $y = 2x$ 이므로 y 는 짝수이다.

따라서 $y = 74$ 이므로

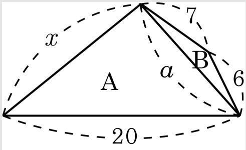
$\therefore x = 37$

17. 길이가 각각 6, 7, 20, x 인 선분을 끝점끼리 이어 붙여 볼록한 사각형을 만들 수 있는 x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $7 < x < 33$

해설



위의 그림과 같이 보조선을 그어 그 길이를 a 라 하자.

삼각형 B 에서 $a < 7 + 6$, 즉 $a < 13$

삼각형 A 에서

1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < a + 20$

그런데 $a < 13$ 이므로 $x < a + 20 < 13 + 20$

$\therefore\ x < 33$

2) 20 이 가장 긴 변인 경우 : $20 < a + x$

그런데 $a < 13$ 이므로 $20 < a + x < 13 + x$

$\therefore\ x > 7$

따라서 1), 2) 에 의해서 $7 < x < 33$ 이다.

18. 반지름의 길이가 1cm 인 원 O 의 바깥쪽에 선분 OA 의 길이가 8cm 인 점 A 가 있다. 원의 중심 O 는 0.4cm/s 의 속도로 직선 OA 를 따라 점 A 쪽 방향으로 움직이고, 원의 반지름은 초당 0.1cm 씩 길어진다고 할 때, 점 A 가 원 O 의 내부에 있게 되는 시간은 몇 초인지 구하여라.

▶ **답 :** ______ 초

▷ **정답 :** 16 초

해설

A 가 원 O 의 내부에 t 초 동안 있다고 할 때,
A 가 원 O 의 내부에 있을 조건은
$\overline{\mathrm{OA}} \le$ (원의 반지름의 길이)
이때, $\overline{\mathrm{OA}} = |8 - 0.4t|$ 이므로
$|8 - 0.4t| \le 1 + 0.1t$

1) $8 - 0.4t \ge 0$ 일 때, 즉 $t \le 20$
$8 - 0.4t \le 1 + 0.1t,\ t \ge 14$
$\therefore\ 14 \le t \le 20$

2) $8 - 0.4t < 0$ 일 때, 즉 $t > 20$
$-8 + 0.4t \le 1 + 0.1t,\ t \le 30$
$\therefore\ 20 < t \le 30$

따라서 1), 2) 에 의해서 $14 \le t \le 30$ 이므로 점 A 는 점 O 의 내부에 16 초 동안 들어가게 된다.

19. 카드를 카드 상자에 넣으려고 하는데 카드를 10 장씩 넣으면 20 장이 남고, 11 장씩 넣으면 상자가 1 개 남고 어느 상자에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가게 된다. 이 때 카드의 장수로 틀린 것을 모두 골라라.

① 360장 ② 370장 ③ 380장

④ 390장 ⑤ 400장

해설

상자가 x 개 있다고 하면, 카드 수는 $(10x+20)$ 장이다.
11 장씩 넣을 경우 상자가 1 개가 남고 어느 상자에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가므로, $(x-2)$ 번째까지는 11 장씩 들어가지만 나머지 하나에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가게 된다.
나머지 한 상자에 6 장이 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $11(x-2)+6$ 이고, 8 장이 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $11(x-2)+8$ 이다.
카드 수는 상자에 11 장씩 들어가고 나머지 한 상자에는 6 장이 들어갈 경우보다 같거나 많고 8 장이 들어갈 경우보다 같거나 적으므로 식으로 나타내면 $11(x-2)+6 \le 10x+20 \le 11(x-2)+8$ 이다.

이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 11(x-2)+6 \le 10x+20 \\ 10x+20 \le 11(x-2)+8 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 36 \\ x \ge 34 \end{cases}$ 이다. 그러므로 x 의 범위는 $34 \le x \le 36$ 이다. 따라서 상자는 34 또는 35 또는 36 개가 될 수 있다.
카드의 수는 (상자의 수)$\times 10+20$ 이므로 360 또는 370 또는 380 장이다.

20. 사과를 한 상자에 50 개씩 넣으면 마지막 상자에는 38 개의 사과가 들어간다. 그런데 60 개의 사과가 썩어버려서 버리고, 한 상자에 44 개씩 넣으면 상자가 부족하고, 한 상자에 45 개씩 넣으면 마지막 한 상자만 가득 차지 않을 때, 상자의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 13 개

▷ 정답 : 14 개

해설

상자의 갯수를 x 개라 하면, 사과의 갯수는 $50(x-1)+38=50x-12$ (개) 이다.

그런데 60 개를 버렸으므로

$50x-12-60=50x-72$

$44x<50x-72<45x$

$\therefore 12<x<14.4$

따라서 상자의 갯수는 13 개, 14 개이다.

21. 프로야구 팀 A, B 의 오늘자 승률을 비교해보면, 20 경기를 치른 A 팀의 승률이 14 경기를 치른 B 팀의 승률보다 높았고, 두 팀의 승수의 합은 20 승이었다. 만약 다음 경기부터 양 팀이 6 연승을 달린다면 A 팀과 B 팀의 승률 순위가 바뀐다고 할 때, 오늘자 기록에서 A 팀이 패한 회수를 구하여라. (단, 무승부는 없다.)

▶ 답: ______ 회

▷ 정답: 8 회

해설

오늘까지 A 팀이 이긴 경기 수를 x 회라 하면 B 팀이 이긴 경기 수는 $(20-x)$ 회이다.

A 팀의 오늘까지의 승률은 $\frac{x}{20}$, B 팀의 오늘까지의 승률은 $\frac{20-x}{14}$ 이므로

$$\frac{x}{20} > \frac{20-x}{14} \quad \therefore x > \frac{200}{17} \cdots ①$$

6 경기를 더 이겼을 때, A 팀의 승률은 $\frac{x+6}{26}$, B 팀의 승률은 $\frac{26-x}{20}$ 이므로

$$\frac{x+6}{26} < \frac{26-x}{20} \quad \therefore x < \frac{278}{23} \cdots ②$$

①, ② 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{200}{17} < x < \frac{278}{23} \quad \therefore 11.\times\times\times < x < 12.\times\times\times$$

따라서 $x = 12$ 경기이므로 오늘자 기록에서 A 팀이 패한 횟수는 8 회이다.

22. 지연이는 100 원짜리와 500 원짜리 동전으로만 5000 원을 가지고 있다. 100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적을 때, 500 원짜리 동전의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

100 원짜리 동전의 개수를 x 개, 500 원짜리 동전의 개수를 y 개라고 하면,

$100x + 500y = 5000$, $x + 5y = 50$, $x = 5(10 - y)$

100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적다고 하였으므로,

$2y < x < 3y$, $2y < 5(10 - y) < 3y$, $\frac{25}{4} < y < \frac{50}{7}$ 이고, 이를 만족하는 자연수 $y = 7$ 이다.

500 원짜리 동전의 개수는 7 개이다.

23. 집에서 학교까지의 거리 중 처음 600m 는 3km/h 의 속도로 걸어가고, 나머지 거리는 6km/h 의 속도로 달려가면, 25 분 이상 30 분 이하의 시간이 걸리는 지역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 : ______ km^2

▷ 정답 : 2.15π km^2

해설

거리를 $a$km 라 하면

(처음 600m 를 가는 데 걸린 시간)$= \dfrac{0.6}{3} = 0.2$

(나머지 거리를 가는 데 걸린 시간)$= \dfrac{a-0.6}{6}$

총 25 분 이상 30 분 이하의 시간이 걸리므로

$$\frac{25}{60} \le 0.2 + \frac{a-0.6}{6} \le \frac{30}{60}$$

$\therefore\ 1.9 \le a \le 2.4$

따라서 구하는 넓이는 반지름이 2.4 인 원의 넓이에서 반지름이 1.9 인 원의 넓이를 뺀 것이므로

$\therefore\ \pi(2.4)^2 - \pi(1.9)^2 = 5.76\pi - 3.61\pi = 2.15\pi\ (\text{km}^2)$

24. 좌표평면 위의 두 점 $A(4,\ 3)$, $B(1,\ 3)$이 있다. 점 A에서 x축 위의 점과 y축 위의 점을 각각 지나 점 B에 이르는 최단 거리는?

① 5 ② 7 ③ $\sqrt{53}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{75}$

해설

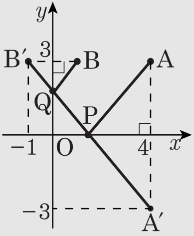
점 A의 x축에 대한 대칭점을 A', 점 B의 y축에 대한 대칭점을 B'

두 점 A', B'을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면

$\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$

주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 $A'(4, -3)$, $B'(-1, 3)$ 사이의 거리이다.

$\therefore\ \overline{A'B'} = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$



25. 정점 $A(4,\ 2)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$　② $2\sqrt{5}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y=x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y=x$에 대한 대칭점은 $A'(2, 4)$

x축에 대한 대칭점은 $A''(4, -2)$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA} \geq \overline{A'A''}$

$=\sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$

26. 평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 O(0, 0), A(2, 0), B(2, 1)에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전중심 P의 좌표는?

① $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$　② $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$　③ $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
④ $P(1, \frac{1}{2})$　⑤ $P(2, \frac{1}{2})$

해설

$P(x,\ y)$ 라고 하면 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 = x^2+y^2+(x-2)^2+y^2+(x-2)^2+(y-1)^2 = 3x^2-8x+3y^2-2y+9 = 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

이 값을 최소가 되게 하는 점 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

27. 세 점 $A(2,3)$, $B(3,0)$, $C(4,1)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle C$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 $D(a,b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① 3　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 15

해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해
$\overline{AC} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \sqrt{2}$ 에서
$\overline{AD} : BD = \overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 이다.
따라서 점 D는 $\overline{AB}$ 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이므로

$$D(a,b) = \left(\frac{2\times3+1\times2}{2+1}, \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right) = \left(\frac{8}{3}, 1\right)$$

$\therefore\ 3ab = 8$

28. 정점 A$(-2,\ 3)$과 직선 $y=2x-1$ 위의 동점 P를 잇는 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

① $y=x+\frac{13}{3}$　② $y=2x+\frac{13}{3}$　③ $y=3x+\frac{13}{3}$

④ $y=4x+\frac{13}{3}$　⑤ $y=5x+\frac{13}{3}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ 2a-1)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{1\cdot a+2\cdot(-2)}{1+2}=\frac{a-4}{3}$$

$$y=\frac{1\cdot(2a-1)+2\cdot 3}{1+2}=\frac{2a+5}{3}$$

여기에서 a를 소거하여 $x,\ y$ 의 관계식을 구하면

$$\therefore\ y=2x+\frac{13}{3}$$

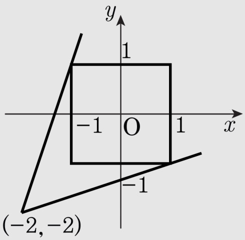
29. $|x+y|+|x-y|=2$, $kx-y+2k-2=0$을 동시에 만족하는 실수 x, y가 존재할 때, 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면, $M+m$의 값은?

① 3　② $\dfrac{10}{3}$　③ $\dfrac{11}{3}$　④ 4　⑤ 5

해설

$|x+y|+|x-y|=2$ 을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다. 한편, $kx-y+2k-2=0$ 은 k 에 관하여 정리하면

$k(x+2)-(y+2)=0$ 이므로 k 의 값에 관계없이 항상 $(-2,-2)$ 를 지나는 직선이다.



두 도형을 동시에 만족하는 실수 x, y 가 존재해야 하므로 두 그래프가 만나야 한다.

따라서 k 는 이 직선의 기울기 이므로

직선이 점$(-1,1)$ 을 지날 때, k 는 최대이고

점 $(1,-1)$ 을 지날 때 k 는 최소이다.

$$M=3,\ m=\frac{1}{3}$$

$$\therefore M+m=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

30. 임의의 실수 k에 대하여 $(x+2y-5)+k(x-y+1)=0$으로 나타내어지는 직선 l이 있다. 두 점 $\mathrm{A}(5,\ -11)$, $\mathrm{B}(-4,\ 7)$을 잇는 선분 AB 위의 점으로서 직선 l과의 교점이 될 수 없는 점의 좌표는 $(a,\ b)$이다. 이 때, $a+2b$를 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$l\ :\ (x+2y-5)+k\cdot(x-y+1)=0$

점 A와 B를 지나는 직선의 방정식 기울기는

$$\frac{-11-7}{5+4}=\ -2$$

$y=-2(x-5)-11\ =-2x-1\ \cdots㉠$

$\therefore\ 2x+y+1=0$

선분 AB의 경우 $-4\le x\le 5$에서만 만족

l직선에 ㉠을 대입하면

$(x-4x-2-5)+k(x+2x+1+1)=0$

$(-3x-7)+k(3x+2)=0$

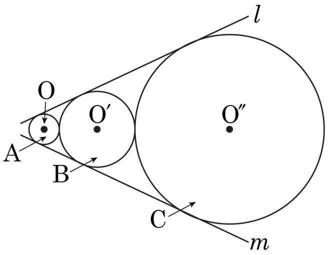
임의의 상수 k에 대해서 등식을 만족해야하므로

$x=-\dfrac{2}{3}$ 일 때 조건에 위배된다.

$$y=-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1=\frac{1}{3}$$

$$a+2b=\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

31. 다음 그림과 같이 두 직선 l, m 에 접하는 세원 A, B, C 가 서로 외접하고 있다. 두 원 A, B 의 반지름의 길이가 각각 $2, 5$ 일 때, 원 C 의 지름의 길이는? (단, 원의 중심은 일직선 위에 있다.)

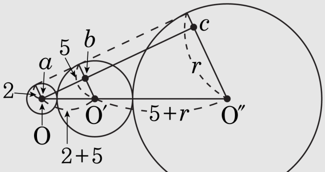


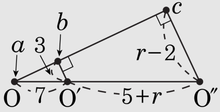
① 15 ② 17 ③ 19

④ 21 ⑤ 25

해설

세 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각해보자. 원 C 의 반지름을 r 이라고 하면, 다음 두 직각삼각형은 닮음이다.





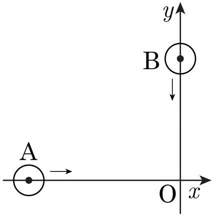
$\therefore \quad (2+5):3=(12+r):(r-2)$

$\Rightarrow \quad 36+3r=7r-14$

$\Rightarrow \quad r=12.5$

$\therefore$ 지름이 25

32. 반지름이 1 인 두 원 A, B 가 현재 아래 그림의 위치에 있고, A 의 중심 $(-10,\ 0)$은 x 축 위를 왼쪽에서 오른쪽으로, B 의 중심 $(0,\ 8)$은 y 축 위를 위에서 아래로 매초 1 의 속도로 움직일 때, 원 A, B 가 최초로 접할 때와 두 번째 접할 때 각각의 시간은?



① $t=2,\ 4$ ② $t=4,\ 6$ ③ $t=8,\ 10$

④ $t=12,\ 14$ ⑤ $t=16,\ 18$

해설

t초 후 $A(-10+t,\ 0)$, $B(0,\ 8-t)$에 위치.

t 초 후의 두 원의 중심 사이의 거리를 d 라 하면

$d^2=(8-t)^2+(10-t)^2=2t^2-36t+164$

접하는 경우는 두 원의 중심 사이의 거리가

두 원의 반지름의 합과 같을 때이므로,

$\sqrt{(8-t)^2+(10-t)^2}=\sqrt{2t^2-36t+164}=2$

$\therefore\ 2t^2-36t+160=0$

$\therefore\ t^2-18t+80=0$

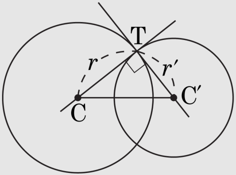
$\therefore\ t=8,\ 10$

33. 두 원 $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y+c=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2+6x-2y+5=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 교점에서의 접선이 직교할 때 상수 c 의 값은 ?

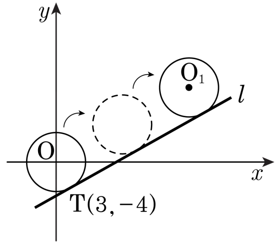
① -3 ② -2 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

㉠ 에서 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-c$ 이므로
원 ㉠ 의 중심은 $\mathrm{C}(-1,\ -2)$,
반지름의 길이 $r=\sqrt{5-c}$,
㉡에서 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$ 이므로
원 ㉡ 의 중심은 $\mathrm{C}'(-3,\ 1)$,
반지름의 길이 $r'=\sqrt{5}$
따라서, $\overline{\mathrm{CC}'}^2=13$ 이고 그림에서
$\overline{\mathrm{CT}}^2+\overline{\mathrm{C}'\mathrm{T}}^2=\overline{\mathrm{CC}'}^2$ 이므로
$r^2+r'^2=\overline{\mathrm{CC}'}^2$
$\therefore\ 5-c+5=13$
$\therefore\ c=-3$



34. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T(3, −4) 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 T(3, −4) 에서 원 O 와 접하므로
직선 OT 와 직선 l 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,

직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

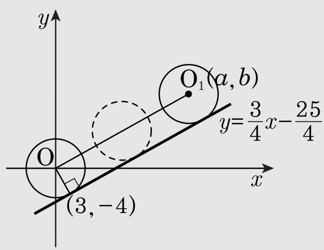
$\therefore \frac{b}{a}$ (직선 OO_1 의 기울기)

= (직선 l 의 기울기)

$=\frac{3}{4}$

직선 l 의 방정식은 $y-(-4)=\frac{3}{4}(x-3)$

$\therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$



35. 두 원 $x^2-2x+y^2-4y+4=0$, $x^2-6x+y^2-2y+9=0$ 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이 될 때, ab 의 값을 구하여라.(단, a, b 는 상수)

▶ 답 :

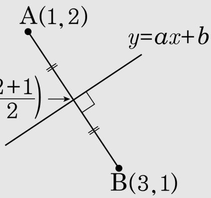
▷ 정답 : -5

해설

두 원의 방정식은 각각 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 이므로

두 원의 중심 $(1,\ 2)$, $(3,\ 1)$ 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이 되어야 한다.

즉, $\mathrm{M}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) \rightarrow$



$$\frac{1-2}{3-1}\times a=-1$$

$\therefore\ a=2$

선분AB 의 중심

$\mathrm{M}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ 이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$$\frac{2+1}{2}=2\cdot\frac{1+3}{2}+b$$

$$\therefore b=-\frac{5}{2}$$

따라서, $ab=-5$