1. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\frac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

2. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1 > 0)$

$= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5 = 10$

3. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서
$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)
따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,
$a^2=1$
$\therefore\ a=b=c=1$
$\therefore\ a+b+c=3$

4. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1} &= \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1}\\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1}\\ &= x-1 = 2^5-1 = 31\end{aligned}$$

5. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 3$, $B = x^3 - x^2 - ax + 5$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$A + B = 2x^3 + 2 = 2(x^3 + 1)$

$\quad = 2(x+1)((x^2 - x + 1)$

$G = x + 1$이므로

$x = -1$을 $A,\ B$에 대입하면 식의 값은 0

$\therefore\ a = -3$

※ $A = aG,\ B = bG$ ($a,\ b$는 서로소), $A + B = (a+b)G$

즉, 최대공약수는 두 식의 합의 인수이다.

6. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

> A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
> $A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)로 나타낼 수 있다.
> A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
> 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk$, $a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
> a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
> $B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서
> b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(   ) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수　　② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수　　④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk$, $a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

7. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$
$n=4k+1 \Rightarrow f(n)=-i^{4k+1}=-i$
$n=4k+2 \Rightarrow f(n)=2\pi$
$n=4k+3 \Rightarrow f(n)=-i$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$
계속 반복되므로
$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$
$=i\times 501+f(2005)$
$=501i-i=500i$

8. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b　　② $2b$　　③ 0　　④ $5a$　　⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5,\quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

9. $x = 1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

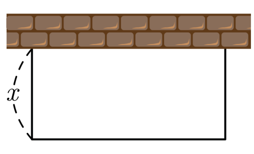
▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y = a(x-1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$
$a - 1 = 3$, $a = 4$
$y = 4(x-1)^2 - 1$
$\therefore apq = 4 \times 1 \times (-1) = -4$

10. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 3 m ② 4 m ③ 5 m

④ 6 m ⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} y &= x(20-2x) \\ &= -2x^2 + 20x \\ &= -2(x-5)^2 + 50 \end{aligned}$$

$x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

11. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 x% 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x$% 감소한다고 한다. 이때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x의 값은?

① 10　　② 15　　③ 20　　④ 25　　⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.
가격을 x% 올리면 상품 1개당 판매 가격이
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$개이므로
판매 금액은
$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)$
$=ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300}$
$=\frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x)$
$=\frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000)$
$=\frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\}$
따라서 $x=25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

12. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

① 1 초, 3 초 ② 2 초, 4 초 ③ 2 초, 6 초
④ 3 초, 6 초 ⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은
$y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x-2)^2 + 80$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80
따라서 2 초 후이다.
지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.
$0 = -5x^2 + 20x + 60$
$-5(x^2 - 4x - 12) = 0$
$-5(x-6)(x+2) = 0$
그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$
즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

13. x, y가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 6개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$
$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$
따라서
$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$
$x-2=2$, $y-1=2$일 때, $x=4$, $y=3$
$x-2=4$, $y-1=1$일 때, $x=6$, $y=2$
$x-2=-1$, $y-1=-4$일 때, $x=1$, $y=-3$
$x-2=4$, $y-1=-1$일 때, $x=6$, $y=0$
$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$
따라서 순서쌍은 $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(1, -3)$, $(6, 0)$, $(3, 5)$로 모두 6개이다.

14. 연립부등식 $\begin{cases} 1.2x-2 \le 0.8x+3.2 \\ 3-\dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2} \\ 0.\dot{9}x \le 6 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \le b$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -9　② -5　③ -2　④ 2　⑤ 9

해설

i) $1.2x-2 \le 0.8x+3.2$,
$0.4x \le 5.2, \quad x \le 13$
ii) $3-\dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12-(x-2) < 2(2x-3), \quad x > 4$
iii) $0.\dot{9}x \le 6$
$\dfrac{9}{9}x \le 6$
$x \le 6$
$\therefore \ 4 < x \le 6$

15. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

① $3 < a \le 4$　② $0 < a \le 3$　③ $0 < a < 3$
④ $0 < a \le 4$　⑤ $0 < a < 4$

해설

$\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \cdots ㉠ \\ |x| < a \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6 < -x+2$ 의 해는 $x < -4$
$-x+2 < -2x-1$ 의 해는 $x < -3$
$\therefore x < -4$
㉡에서 $|x| < a$는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면
$-a \ge -4$, $a \le 4$,
그런데 a는 양수이므로 a의 값의 범위는 $0 < a \le 4$ 이다.

16. 12% 의 설탕물 300g 이 있을 때, 물 xg 을 증발시켜 15% 이상 20% 이하의 설탕물을 만들려고 한다. x 의 값으로 옳지 않은 것은?

① 60 ② 80 ③ 100 ④ 120 ⑤ 130

해설

12% 의 소금물 300g 의 소금의 양은 $\frac{12}{100} \times 300 = 36$ (g) 이다.

따라서 물 xg 을 뺐을 때의 농도를 나타내면 $\frac{36}{300-x} \times 100$ 이다.

이 값이 15% 이상 20% 이하이므로, $15 \le \frac{36}{300-x} \times 100 \le 20$ 이고,

이를 연립 방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 15 \le \frac{36}{300-x} \times 100 \\ \frac{36}{300-x} \times 100 \le 20 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \ge 60 \\ x \le 120 \end{cases}$ 이다.

따라서 빼줘야 하는 물의 양 x 의 범위는 $60 \le x \le 120$ 이다.

17. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1>0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하면?

① $k<1,\ k>2$　② $1<k<2$　③ $-2\le k\le 2$

④ $k\le 1,\ k>2$　⑤ $1\le k<2$

해설

i) $k\ne 1$일 때, 주어진 부등식이 성립하려면
판별식이 0보다 작아야 한다

$D'=(k-1)^2-(k-1)<0$

$\Rightarrow (k-1)(k-2)<0$

$\Rightarrow\ 1<k<2$

ii) $k=1 \Rightarrow\ 1>0$ 성립

$\therefore k$의 범위 : $1\le k<2$

18. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3　　② $2\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{2}$　　⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로

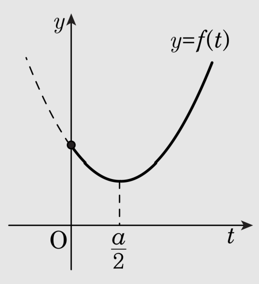
$|x| = t\ (t \geq 0)$ 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \geq 0$

$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$



$-\frac{a^2}{4} + 2 \geq 0,\ a^2 - 8 \leq 0$

$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$

그런데 $a > 0$ 이므로

$0 < a \leq 2\sqrt{2}$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

19. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-1 \leq a \leq 1$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-1 < a < 0$

④ $0 \leq a < 1$ ⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$로 놓으면

$t^2 + t - 6 \geq 0,\ (t+3)(t-2) \geq 0$

$\therefore\ t \leq -3$ 또는 $t \geq 2$

(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때

$x^2 + 2ax + 3 \leq -3$ 에서 $x^2 + 2ax + 6 \leq 0$

$y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는

아래로 볼록한 포물선이므로

모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때

$x^2 + 2ax + 3 \geq 2$ 에서 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore\ -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii) 에서 $-1 \leq a \leq 1$

20. x에 대한 이차함수 $y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$의 값이 모든 실수 x에 대하여 항상 양이 되는 실수 a의 값의 집합을 A라 하고, 항상 음이 되는 실수 a 의 값의 집합을 B 라 할 때, $A \cup B$는?

① $\{a \mid a<6\}$ ② $\{a \mid a \le 6\}$ ③ $\{a \mid 3<a<6\}$
④ $\{a \mid 3 \le a \le 6\}$ ⑤ $\{a \mid a>3\}$

해설

$y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$이 이차함수이므로 $a \neq 3$
이 때, 이차방정식 $(a-3)x^2-2(a-3)x+3=0$의 판별식을 D라 하자.
(i) 항상 양일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y>0$이려면 $a-3>0$, 즉 $a>3$ 이고
$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$
$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore A=\{a \mid 3<a<6\}$
(ii) 항상 음일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y<0$이려면 $a-3<0$, 즉 $a<3$ 이고
$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$
$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore B=\varnothing$
(i), (ii)에서 $A \cup B=\{a \mid 3<a<6\}$

21. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 1

해설

$|x| < |a| \ \Leftrightarrow \ x^2 < a^2 \ \Leftrightarrow \ x^2 - a^2 < 0 \cdots$①

$\Leftrightarrow \ ax^2 + (a^2 - 1)x + b \ > \ 0 \cdots$②

$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = -1$

$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$

$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ x^2-(a+6)x+6a \le 0 \end{cases}$ 의 정수의 해가 5와 6일 때, a의 값의 범위는 $p<a\le q$이다. 이때, $p+q$의 값은?

① 5　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$\begin{cases} x^2-6x+8>0 \cdots ㉠ \\ x^2-(a+6)x+6a \le 0 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠: $x>4, x<2$

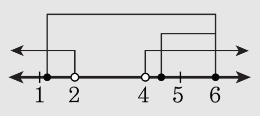
㉡: $(x-6)(x-a) \le 0$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이라면

㉡의 해는 $a \le x \le 6$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이 되도록

수직선으로 나타내면 다음과 같다.



$1<a\le5$

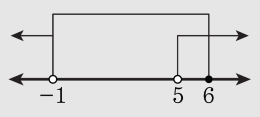
$p+q=1+5=6$

23. 두 부등식 $-x^2+4x+5<0$,
$x^2+ax-b \le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $5<x\le 6$일 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -11 ④ 11 ⑤ 5

해설

$x^2-4x-5>0$
$(x+1)(x-5)>0$
$x<-1$ 또는 $x>5$
$x^2+ax-b\le 0$
$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)\le 0$ 라 하자
$\alpha \le x \le \beta$
이제 주어진 조건에 만족하려면



$\therefore \alpha=-1, \beta=6$
$\Rightarrow (x+1)(x-6)=x^2-5x-6$
$a=-5, b=6, a+b=1$

24. 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(2, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a, b)$라 할 때, $a^2 - b^2$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2$ 으로부터

$a^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2, \ a + b = 1 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PO}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$ 으로부터

$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2, \ a - b = 2 \cdots$ ㉡

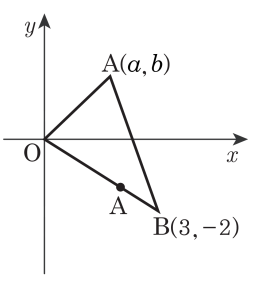
㉠, ㉡로 부터 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 1 \times 2 = 2$

25. 좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(3, −2) 가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고
$\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서 준식은 세 점 O, A, B가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며 이 때 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ 이다.



26. 두 점 $A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{8} < t < \frac{5}{6}$

해설

$A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 을 $t:1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t\cdot(-5)+(1-t)\cdot 3}{t+1-t}, \frac{t\cdot 1+(1-t)\cdot(-2)}{t+1-t}\right)$$

$$= (-5t+3-3t, t-2+2t) = (-8t+3, 3t-2)$$

이 점이 제3 사분면에 있으므로

$-8t+3<0$, $8t>3$, $t>\frac{3}{8}$

$3t-2<0$, $3t<2$, $t<\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$

27. 평면상의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여, 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 3 등분점 중 P 에 가까운 쪽의 점을 $\mathrm{P} * \mathrm{Q}$ 로 나타낼 때, $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(-2,3)$, $\mathrm{C}(-1,-1)$ 에 대하여 점 $(\mathrm{A} * \mathrm{B}) * \mathrm{C}$ 의 좌표를 구하면?

① $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$　② $(-3, 4)$　③ $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right)$

④ $(2, -1)$　⑤ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{2}\right)$

해설

$\mathrm{P} * \mathrm{Q}$ 는 P, Q 의 $1:2$ 내분점을 말한다.

$\therefore (\mathrm{A} * \mathrm{B}) = \left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 2}{1+2}\right) = \left(0, \frac{7}{3}\right)$

$\left(0, \frac{7}{3}\right) * \mathrm{C}$

$= \left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times \frac{7}{3}}{1+2}\right)$

$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$

$(\mathrm{A} * \mathrm{B}) * \mathrm{C} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$

28. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이 때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심 ② 내심 ③ 수심
④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$, C$(x_3,\ y_3)$
송전소의 위치를 D$(x,\ y)$, 비용을 P 라고 하면

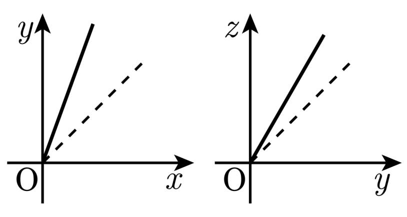
$$\mathrm{P} = k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 + (x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\right\} - \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} - \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3} + k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$ 에서

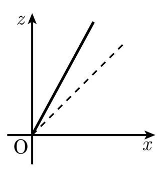
$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

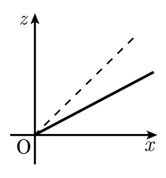
즉 $\triangle$ABC 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

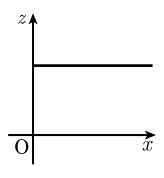
29. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

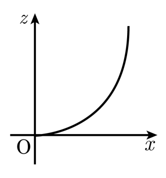


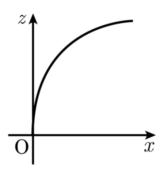
이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$
$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$
따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

30. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선 $x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여
정리하면 $k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이
k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는
$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

31. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 실수)

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

준식을 변형하면 $(1+k)x+(1-k)y-2=0$ 이므로

$$f(k)=\frac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

따라서, $k=0$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$

32. 다음은 서로 다른 세 점 A$(x_1,\ y_1)$, B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이 S가 $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$임을 보이는 과정이다.

> 선분 AB의 길이
> $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$이고, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 $\boxed{(가)}$이므로, 직선의 방정식은
> $y - y_1 = \boxed{(가)}(x - x_1) \cdots$ ㉠
> 이 때, 점 C와 직선 ㉠사이의 거리 d는
> $d = \dfrac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{\boxed{(나)}}$
> 따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는
> $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$이다.

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

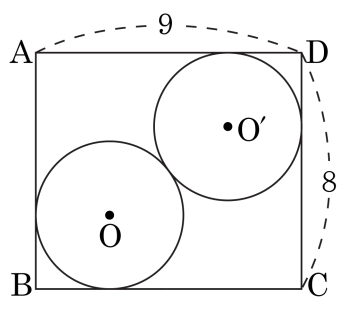
	(가)	(나)
①	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,	$\sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$
②	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,	$\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$
③	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
④	$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$,	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
⑤	$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$,	$\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

해설

(가) $\dfrac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(나) 점 $(x_1,\ y_1)$에서 직선 $ax + by + c = 0$사이의 거리 d는 $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 임을 이용하면 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$이다.

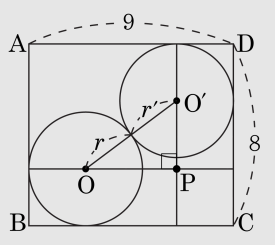
33. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 안에 서로 외접하는 두 원 O, O′이 있다.



원 O는 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$에 접하고 원 O′은 $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{DA}}$에 접한다. 이 때, 두 원의 넓이의 합의 최솟값은? (단, $\overline{\mathrm{AD}}=9$, $\overline{\mathrm{CD}}=8$이다.)

① 11π ② $\frac{25}{2}\pi$ ③ 14π ④ $\frac{31}{2}\pi$ ⑤ 17π

해설



원 O, O′의 반지름을 각각 r, r'이라 하고 원의 중심 O, O′에서 각각 $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$에 평행한 선을 그어 교점을 P라 하면

$\overline{\mathrm{OO'}}=r+r'$

$\overline{\mathrm{OP}}=9-(r+r')$

$\overline{\mathrm{O'P}}=8-(r+r')$이므로

$(r+r')^2=\left\{9-(r+r')\right\}^2+\left\{8-(r+r')\right\}^2$

정리하면

$(r+r'-5)(r+r'-29)=0$

$r+r'\le 8$ 이므로 $r+r'=5$

$\therefore\ \pi r^2+\pi r'^2=\pi\left\{r^2+(5-r)^2\right\}$

$\qquad=2\pi\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}\pi$

따라서 $r=\frac{5}{2}$일 때, 최솟값은 $\frac{25}{2}\pi$이다

34. 두 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-a)^2=4$이 직교할 때 a의 값의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 1)$, $(2,\ a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2+(1-a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $1,\ 2$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-2)^2+(1-a)^2=1^2+2^2$
$\therefore\ a^2-3a=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

35. $(k,\ 0)$에서 $x^2+y^2-2y=0$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① $k=-\sqrt{2}+1$　② $k=\sqrt{2}+1$　③ $k=\sqrt{2}-1$
④ $k=2\sqrt{2}+1$　⑤ $k=\sqrt{2}+2$

해설

$x^2+y^2-2y=0$에서 $x^2+(y-1)^2=1$이므로
두 접선 중 하나는 x축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1이다. $(\because\ k>0)$
따라서 접선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓으면 $x+y-b=0$
이 때, 원의 중심 $(0,1)$에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0+1-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$$

$\therefore |1-b|=\sqrt{2}$
$b>1$이므로 $b-1=\sqrt{2}$
$\therefore b=\sqrt{2}+1$
따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\sqrt{2}+1$이고
점 $(k,0)$을 지나므로
$0=-k+\sqrt{2}+1$　　$\therefore k=\sqrt{2}+1$