

1. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

2. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$ 이라 하면

$$\begin{aligned}& \sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1} \\&= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} \\&= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2) + 1} \\&= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1} \\&= \sqrt{(x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) + 1} \\&= \sqrt{\{(x^2+3x) + 1\}^2} \\&= x^2 + 3x + 1 \quad (\because (x^2+3x) + 1 > 0) \\&= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505 \\&\text{각자리 숫자의 합은 } 5 + 0 + 5 = 10\end{aligned}$$

3. 세 양수 a, b, c 가 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 를 만족시킬 때 a, b, c 를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이라고 한다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \text{에서}$$

$$a > 0, b > 0, c > 0 \text{이므로 } a + b + c \neq 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} = 0$$

$$\therefore a = b = c \quad (\because a, b, c \text{는 실수})$$

따라서 a, b, c 를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그

$$\text{넓이가 } \frac{\sqrt{3}}{4} \text{이므로 } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$a^2 = 1$$

$$\therefore a = b = c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

4. $\frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$ 라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1} &= \frac{x^8 - x^7 - x + 1}{x^7 - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1} \\ &= x-1 = 2^5-1 = 31\end{aligned}$$

5. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 3$, $B = x^3 - x^2 - ax + 5$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} A + B &= 2x^3 + 2 = 2(x^3 + 1) \\ &= 2(x + 1)((x^2 - x + 1)) \end{aligned}$$

$G = x + 1$ 이므로

$x = -1$ 을 A, B 에 대입하면 식의 값은 0

$$\therefore a = -3$$

※ $A = aG$, $B = bG$ (a, b 는 서로소), $A + B = (a + b)G$
즉, 최대공약수는 두 식의 합의 인수이다.

6. 다음은 유클리드 호제법 ‘두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.’ 를 보이는 과정이다.

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)로 나타낼 수 있다.
 A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = G(a - bQ)$
 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
 (가) m (일차이상의 다항식)이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
 $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
 a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서
 b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

() 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

- | | |
|------------|------------|
| ① 공약수, 공약수 | ② 공약수, 서로소 |
| ③ 공약수, 공배수 | ④ 공배수, 서로소 |
| ⑤ 공배수, 공약수 | |

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)이고,
 A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = (a - bQ)G$
 즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
 한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
 공약수인 m 이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$
 $a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
 즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

7. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) = \begin{cases} i^{n+1} (n = 4k) \\ -i^n (n = 4k + 1) \text{ (단, } k \text{는 정수)} \\ 2i (n = 4k + 2) \\ -i (n = 4k + 3) \end{cases}$$

(단, k 는 정수)이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$ 를 구하면?

① i

② $-i$

③ 0

④ $500i$

⑤ $501i$

해설

$$n = 4k \Rightarrow f(n) = i^{4k+1} = i$$

$$n = 4k + 1 \Rightarrow f(n) = -i^{4k+1} = -i$$

$$n = 4k + 2 \Rightarrow f(n) = 2i$$

$$n = 4k + 3 \Rightarrow f(n) = -i$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -i + 2i - i + i = i$$

계속 반복되므로

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$$

$$= i \times 501 + f(2005)$$

$$= 501i - i = 500i$$

8. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ 0

④ $5a$

⑤ a

해설

$$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

9. $x = 1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x - p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$y = a(x - 1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$$

$$a - 1 = 3, a = 4$$

$$y = 4(x - 1)^2 - 1$$

$$\therefore apq = 4 \times 1 \times (-1) = -4$$

10. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



- ① 3 m ② 4 m ③ 5 m
④ 6 m ⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,

$$y = x(20 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 20x$$

$$= -2(x - 5)^2 + 50$$

$x = 5$ 일 때, 최대값은 50 이다.

11. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x\%$ 감소한다고 한다. 이때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

원래의 상품 1개당 판매 가격을 a 원, 판매량을 b 개라 하자.
가격을 $x\%$ 올리면 상품 1개당 판매 가격이

$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, 판매량이 $b\left(1 - \frac{2x}{300}\right)$ 개이므로

판매 금액은

$$\begin{aligned} & ab\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{2x}{300}\right) \\ &= ab \cdot \frac{100+x}{100} \cdot \frac{300-2x}{300} \\ &= \frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x) \\ &= \frac{ab}{30000}(-2x^2 + 100x + 30000) \\ &= \frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2 + 31250\} \end{aligned}$$

따라서 $x = 25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

12. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

① 1 초, 3 초

② 2 초, 4 초

③ 2 초, 6 초

④ 3 초, 6 초

⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은

$$y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x-2)^2 + 80 \text{ 이므로}$$

$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80

따라서 2 초 후이다.

지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.

$$0 = -5x^2 + 20x + 60$$

$$-5(x^2 - 4x - 12) = 0$$

$$-5(x-6)(x+2) = 0$$

그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$

즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

13. x, y 가 정수일 때 방정식 $xy - x - 2y - 2 = 0$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.



답 :

개



정답 : 6개

해설

$$xy - x - 2y - 2 + 4 = 4$$

$$x(y - 1) - 2(y - 1) = (x - 2)(y - 1) = 4$$

따라서

$$x - 2 = 1, y - 1 = 4 \text{ 일 때, } x = 3, y = 5$$

$$x - 2 = 2, y - 1 = 2 \text{ 일 때, } x = 4, y = 3$$

$$x - 2 = 4, y - 1 = 1 \text{ 일 때, } x = 6, y = 2$$

$$x - 2 = -1, y - 1 = -4 \text{ 일 때, } x = 1, y = -3$$

$$x - 2 = 4, y - 1 = -1 \text{ 일 때, } x = 6, y = 0$$

$$x - 2 = 1, y - 1 = 4 \text{ 일 때, } x = 3, y = 5$$

따라서 순서쌍은 $(3, 5), (4, 3), (6, 2), (1, -3), (6, 0), (3, 5)$ 로 모두 6개이다.

14. 연립부등식
$$\begin{cases} 1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2 \\ 3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2} \\ 0.9x \leq 6 \end{cases}$$
 의 해가 $a < x \leq b$ 일 때, $a - b$

의 값을 구하면?

① -9

② -5

③ -2

④ 2

⑤ 9

해설

i) $1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2$,

$0.4x \leq 5.2$, $x \leq 13$

ii) $3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12 - (x-2) <$

$2(2x-3)$, $x > 4$

iii) $0.9x \leq 6$

$\frac{9}{9}x \leq 6$

$x \leq 6$

$\therefore 4 < x \leq 6$

15. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x + 2 < -2x - 1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

① $3 < a \leq 4$

② $0 < a \leq 3$

③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \leq 4$

⑤ $0 < a < 4$

해설

$$\begin{cases} 6 < -x + 2 < -2x - 1 \cdots \textcircled{㉠} \\ |x| < a \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $6 < -x + 2$ 의 해는 $x < -4$

$-x + 2 < -2x - 1$ 의 해는 $x < -3$

$$\therefore x < -4$$

㉡에서 $|x| < a$ 는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면

$$-a \geq -4, a \leq 4,$$

그런데 a 는 양수이므로 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 4$ 이다.

16. 12%의 설탕물 300g이 있을 때, 물 x g을 증발시켜 15% 이상 20% 이하의 설탕물을 만들려고 한다. x 의 값으로 옳지 않은 것은?

① 60

② 80

③ 100

④ 120

⑤ 130

해설

12%의 소금물 300g의 소금의 양은 $\frac{12}{100} \times 300 = 36$ (g)이다.

따라서 물 x g을 뺏을 때의 농도를 나타내면 $\frac{36}{300-x} \times 100$ 이다.

이 값이 15% 이상 20% 이하이므로, $15 \leq \frac{36}{300-x} \times 100 \leq 20$

이고,

이를 연립 방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 15 \leq \frac{36}{300-x} \times 100 \\ \frac{36}{300-x} \times 100 \leq 20 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \geq 60 \\ x \leq 120 \end{cases}$ 이다.

따라서 빼줘야 하는 물의 양 x 의 범위는 $60 \leq x \leq 120$ 이다.

17. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(k-1)x^2 + 2(k-1)x + 1 > 0$ 이 항상 성립할 때, k 의 범위를 구하면?

① $k < 1, k > 2$

② $1 < k < 2$

③ $-2 \leq k \leq 2$

④ $k \leq 1, k > 2$

⑤ $1 \leq k < 2$

해설

i) $k \neq 1$ 일 때, 주어진 부등식이 성립하려면
판별식이 0보다 작아야 한다

$$D' = (k-1)^2 - (k-1) < 0$$

$$\Rightarrow (k-1)(k-2) < 0$$

$$\Rightarrow 1 < k < 2$$

ii) $k = 1 \Rightarrow 1 > 0$ 성립

$\therefore k$ 의 범위 : $1 \leq k < 2$

18. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3

② $2\sqrt{2}$

③ 2

④ $\sqrt{2}$

⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로
 $|x| = t$ ($t \geq 0$) 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \geq 0$

$$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$$

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$

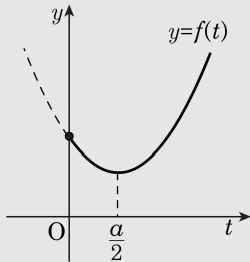
$$-\frac{a^2}{4} + 2 \geq 0, \quad a^2 - 8 \leq 0$$

$$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$0 < a \leq 2\sqrt{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.



19. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq a \leq 1$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-1 < a < 0$
 ④ $0 \leq a < 1$ ⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 6 \geq 0, (t+3)(t-2) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -3 \text{ 또는 } t \geq 2$$

(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때

$$x^2 + 2ax + 3 \leq -3 \text{ 에서 } x^2 + 2ax + 6 \leq 0$$

$y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는

아래로 볼록한 포물선이므로

모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때

$$x^2 + 2ax + 3 \geq 2 \text{ 에서 } x^2 + 2ax + 1 \geq 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 1$$

(i), (ii)에서 $-1 \leq a \leq 1$

20. x 에 대한 이차함수 $y = (a-3)x^2 - 2(a-3)x + 3$ 의 값이 모든 실수 x 에 대하여 항상 양이 되는 실수 a 의 값의 집합을 A 라 하고, 항상 음이 되는 실수 a 의 값의 집합을 B 라 할 때, $A \cup B$ 는?

① $\{a \mid a < 6\}$

② $\{a \mid a \leq 6\}$

③ $\{a \mid 3 < a < 6\}$

④ $\{a \mid 3 \leq a \leq 6\}$

⑤ $\{a \mid a > 3\}$

해설

$y = (a-3)x^2 - 2(a-3)x + 3$ 이 이차함수이므로 $a \neq 3$ 이 때, 이차방정식 $(a-3)x^2 - 2(a-3)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하자.

(i) 항상 양일 경우

모든 실수 x 에 대하여 항상 $y > 0$ 이라면 $a-3 > 0$, 즉 $a > 3$ 이고

$$\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 3(a-3) < 0$$

$$(a-3)(a-3-3) < 0, (a-3)(a-6) < 0$$

$$\therefore 3 < a < 6$$

$$\therefore A = \{a \mid 3 < a < 6\}$$

(ii) 항상 음일 경우

모든 실수 x 에 대하여 항상 $y < 0$ 이라면 $a-3 < 0$, 즉 $a < 3$ 이고

$$\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 3(a-3) < 0$$

$$(a-3)(a-3-3) < 0, (a-3)(a-6) < 0$$

$$\therefore 3 < a < 6$$

$$\therefore B = \emptyset$$

(i), (ii)에서 $A \cup B = \{a \mid 3 < a < 6\}$

21. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 1

해설

$$|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore a < 0, a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{ 일 때 } \textcircled{1} \text{ 은 } x^2 - 1 < 0, \textcircled{2} \text{ 는 } -x^2 + b > 0$$

$$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a+6)x + 6a \leq 0 \end{cases}$ 의 정수의 해가 5와 6일 때, a 의 값의 범위는 $p < a \leq q$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2 - (a+6)x + 6a \leq 0 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠}: x > 4, x < 2$$

$$\textcircled{㉡}: (x-6)(x-a) \leq 0$$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이라면

㉡의 해는 $a \leq x \leq 6$

㉠과 ㉡의 정수해가 5, 6이 되도록 수직선으로 나타내면 다음과 같다.



$$1 < a \leq 5$$

$$p+q = 1+5 = 6$$

23. 두 부등식 $-x^2 + 4x + 5 < 0$,

$x^2 + ax - b \leq 0$ 에 대하여

두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $5 < x \leq 6$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② 1

③ -11

④ 11

⑤ 5

해설

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x + 1)(x - 5) > 0$$

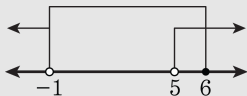
$$x < -1 \text{ 또는 } x > 5$$

$$x^2 + ax - b \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) \leq 0 \text{ 라 하자}$$

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

이제 주어진 조건에 만족하려면



$$\therefore \alpha = -1, \beta = 6$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 6) = x^2 - 5x - 6$$

$$a = -5, b = 6, a + b = 1$$

24. 세 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 외심의 좌표를 $P(a,b)$ 라 할 때, $a^2 - b^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심 (외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$$\overline{PO}^2 = \overline{PA}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2, \quad a+b=1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{PO}^2 = \overline{PB}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2, \quad a-b=2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{로 부터 } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 1 \times 2 = 2$$

25. 좌표평면 위에 세 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(3, -2)$ 가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ $\sqrt{10}$

④ $2\sqrt{3}$

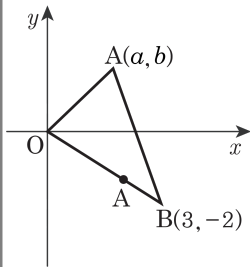
⑤ $\sqrt{13}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고
 $\sqrt{(a-3)^2 + (b+2)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.

따라서 준식은 세 점 O , A , B 가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며
 이 때 $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ 이다.

따라서 $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ 이다.



26. 두 점 A(3, -2), B(-5, 1) 에 대하여 선분 AB 를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$

② $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{8} < t < \frac{5}{6}$

③ $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$

해설

A(3, -2) , B(-5, 1) 을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t \cdot (-5) + (1-t) \cdot 3}{t+1-t}, \frac{t \cdot 1 + (1-t) \cdot (-2)}{t+1-t} \right)$$

$$= (-5t + 3 - 3t, t - 2 + 2t) = (-8t + 3, 3t - 2)$$

이 점이 제3 사분면에 있으므로

$$-8t + 3 < 0, 8t > 3, t > \frac{3}{8}$$

$$3t - 2 < 0, 3t < 2, t < \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$$

27. 평면상의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여, 선분 $\overline{PQ}$ 의 3 등분점 중 P 에 가까운 쪽의 점을 $P * Q$ 로 나타낼 때, $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(-1, -1)$ 에 대하여 점 $(A * B) * C$ 의 좌표를 구하면?

① $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$

② $(-3, 4)$

③ $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right)$

④ $(2, -1)$

⑤ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{2}\right)$

해설

$P * Q$ 는 P, Q 의 1 : 2 내분점을 말한다.

$$\therefore (A * B) = \left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{1 + 2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 2}{1 + 2} \right) = \left(0, \frac{7}{3} \right)$$

$$\left(0, \frac{7}{3} \right) * C$$

$$= \left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 0}{1 + 2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times \frac{7}{3}}{1 + 2} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9} \right)$$

$$(A * B) * C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9} \right)$$

28. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심

② 내심

③ 수심

④ 무게중심

⑤ 방심

해설

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

송전소의 위치를 $D(x, y)$, 비용을 P 라고 하면

$$P = k\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2\right.$$

$$\left. + 3\left(y - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2\right\}$$

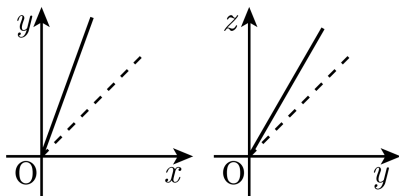
$$- \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} - \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{3}$$

$+ k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ 에서

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ 일 때}$$

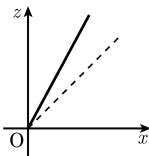
즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

29. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y, y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

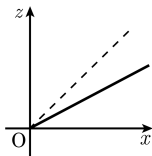


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

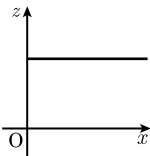
①



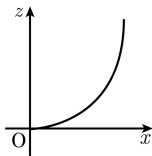
②



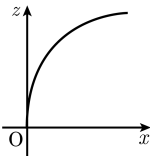
③



④



⑤



해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를

식으로 나타내면 $y = ax(a > 1), z = by(b > 1)$

$\therefore z = b(ax) = abx (ab > 1)$

따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

30. 직선 $(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선 $x + 2y - 4 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ $\sqrt{5}$

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 을 k 에 대하여
정리하면 $k(x+y) + (-3x-y+2) = 0$ 이 식이
 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+y=0, -3x-y+2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=-1$

따라서 점 $(1, -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는

$$\frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

31. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 실수)

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

준식을 변형하면 $(1+k)x + (1-k)y - 2 = 0$ 이므로

$$f(k) = \frac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2 + (1-k)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

따라서, $k=0$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$

32. 다음은 서로 다른 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이 S 가 $S = \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 임을 보이는 과정이다.

선분 AB 의 길이

$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이고, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기가 $\boxed{\text{가}}$ 이므로, 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \boxed{\text{가}}(x - x_1) \cdots \text{㉠}$$

이 때, 점 C 와 직선 ㉠ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{\boxed{\text{나}}}$$

$$\frac{+x_3y_2|}{\boxed{\text{나}}}$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)| \text{이다.}$$

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?
(가) (나)

- ① $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$
- ② $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$
- ③ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- ④ $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- ⑤ $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

해설

(가) $\frac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

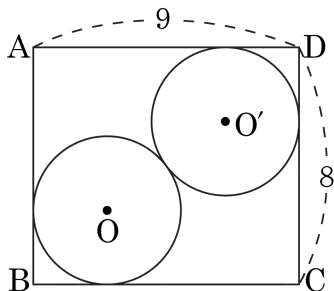
(나) 점 (x_1, y_1) 에서 직선

$ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{임을 이용하면}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{이다.}$$

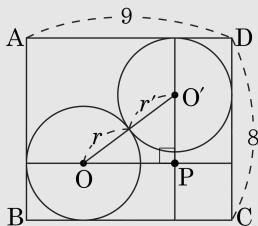
33. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 안에 서로 외접하는 두 원 O, O' 이 있다.



원 O는 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 에 접하고 원 O'은 $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 에 접한다. 이 때, 두 원의 넓이의 합의 최솟값은? (단, $\overline{AD} = 9$, $\overline{CD} = 8$ 이다.)

- ① 11π ② $\frac{25}{2}\pi$ ③ 14π ④ $\frac{31}{2}\pi$ ⑤ 17π

해설



원 O, O'의 반지름을 각각 r , r' 이라 하고 원의 중심 O, O'에서 각각 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ 에 평행한 선을 그어 교점을 P라 하면

$$\overline{OO'} = r + r'$$

$$\overline{OP} = 9 - (r + r')$$

$$\overline{O'P} = 8 - (r + r') \text{ 이므로}$$

$$(r + r')^2 = \{9 - (r + r')\}^2 + \{8 - (r + r')\}^2$$

정리하면

$$(r + r' - 5)(r + r' - 29) = 0$$

$$r + r' \leq 8 \text{ 이므로 } r + r' = 5$$

$$\therefore \pi r^2 + \pi r'^2 = \pi \{r^2 + (5 - r)^2\}$$

$$= 2\pi \left(r - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{25}{2}\pi$$

따라서 $r = \frac{5}{2}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{25}{2}\pi$ 이다

34. 두 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-a)^2 = 4$ 이 직교할 때 a 의 값의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 1)$, $(2, a)$ 이므로

두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2 + (1-a)^2}$ 이다.

두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로

직교하기 위한 조건은

$$(a-2)^2 + (1-a)^2 = 1^2 + 2^2$$

$$\therefore a^2 - 3a = 0$$

근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

35. $(k, 0)$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① $k = -\sqrt{2} + 1$

② $k = \sqrt{2} + 1$

③ $k = \sqrt{2} - 1$

④ $k = 2\sqrt{2} + 1$

⑤ $k = \sqrt{2} + 2$

해설

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이므로

두 접선 중 하나는 x 축이고,

두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

다른 하나의 접선의 기울기는 -1 이다. ($\because k > 0$)

따라서 접선의 방정식을 $y = -x + b$ 로 놓으면 $x + y - b = 0$

이 때, 원의 중심 $(0, 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가

원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0 + 1 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$

$$\therefore |1 - b| = \sqrt{2}$$

$$b > 1 \text{ 이므로 } b - 1 = \sqrt{2}$$

$$\therefore b = \sqrt{2} + 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = -x + \sqrt{2} + 1$ 이고

점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + \sqrt{2} + 1 \quad \therefore k = \sqrt{2} + 1$$