1. 세 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 세 조건을 만족한다.

$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서
$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$
$(a+b)(b+c)(c+a)$
$=(1-c)(1-a)(1-b)$
$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$
$=1-1+1-1=0$

2. $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$ 을 간단히 하면?

① 4^8+3^8 ② $4^{15}-3^{15}$ ③ $4^{15}+3^{15}$
④ $4^{16}-3^{16}$ ⑤ $4^{16}+3^{16}$

해설

$(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^4-3^4)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^8-3^8)(4^8+3^8)$
$=4^{16}-3^{16}$

3. $x^2+\frac{1}{x^2}=14(x>0)$ 일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36 ② 44 ③ 52 ④ 68 ⑤ 82

해설

$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$이므로

$x+\frac{1}{x}=4\ (\because x>0)$

$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})=52$

4. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠
$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡
㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$
그러므로 ㉠에서
$1+8=9(a+b)\cdots$㉢
$1+8=-a+b\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$
$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

5. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개 ② 40 개 ③ 60 개
④ 80 개 ⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면
$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$
$= 5(29 + 1)^3$
$= 5 \cdot 30^3$
$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$
$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$
따라서 N 의 양의 약수의 개수는
$(3 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 80$

6. 두 실수 a, b에 대하여 $[a,\ b] = a^2 - b^2$라 할 때, $[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$을 인수분해하면 $(x-a)(x^3+x^2+bx+c)$이다. 이 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$
$= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1$
$= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10$
$= x^4 + 3x^2 + 6x - 10$
$= (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 10)$
$= (x-a)(x^3 + x^2 + bx + c)$
따라서, $a = 1,\ b = 4,\ c = 10$이므로
$a + b + c = 15$

7. 복소수 $z = a + bi$ (a, b : 실수) 에 대하여 $< z >= b + ai$로 나타낸다.
$z = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 < z >^4$ 의 값을 구하면?

① $3 + 4i$ ② $4 + 3i$ ③ $5 + 4i$
④ $5 + 3i$ ⑤ $4 + 5i$

해설

$z < z >= (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$

$z = \frac{4+3i}{5}$ 이므로

$z < z >= \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5z^5 < z >^4 &= 5z(z < z >)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

8. 양의 실수 $a,\ b$에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$　　② $2+3i$　　③ $5-2i$

④ $1-3i$　　⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A\ (a>0,\ b>0)$

① $a+b=-3,\ a-b=1$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)

② $a+b=2,\ a-b=3$

$\therefore\ a=\dfrac{5}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$ (부적당)

③ $a+b=5,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{7}{2}$ (양의 실수)

④ $a+b=1,\ a-b=-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)

⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

9. $y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, y 의 최댓값, 최솟값에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 최댓값, 최솟값이 없다.
② 최솟값이 양수이다.
③ 최솟값이 음수이다.
④ 최댓값이 양수이다.
⑤ 최댓값이 음수이다.

해설

아래로 볼록하고, x 축과 두 점에서 만나므로 최솟값은 음수이다.

10. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때,$(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1　② ω　③ $-\omega$　④ 2ω　⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$
$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$

11. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha+1}{\alpha+2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$x^2+2x+4=0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로
$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\overline{\alpha}+1}{\overline{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}{\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+4} \\ &= 4 \times \frac{4\times4+2(-2)+1}{4+2(-2)+4} = 13 \end{aligned}$$

12. 두 방정식 $x^2-(k+2)x+2k=0$, $x^2+kx-2k=0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재할 때, 상수 k의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

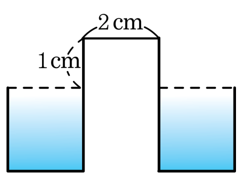
해설

공통인 근을 α라 하면
$\alpha^2-(k+2)\alpha+2k=0$
$\alpha^2+k\alpha-2k=0$
두 식을 더하면
$2\alpha^2-2\alpha=0$, $\alpha(\alpha-1)=0$
$\alpha=0$ 이면 $k=0$
$\alpha=1$ 이면 $k=1$
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

해설

㉠ : $x^2-(k+2)x+2k=0$에서 $(x-k)(x-2)=0$
㉡ : $x^2+kx-2k=0$
ⅰ) $x=k$ 가 ㉡의 해일 때
$k^2+k^2-2k=0$,
$k^2-k=0$
$k=1$ 또는 $k=0$
ⅱ) $x=2$가 ㉡의 해일 때
$4+2k-2k=0$, $4=0$ 성립하지 않는다.
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

13. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



① $125\,cm^2$　② $288\,cm^2$　③ $350\,cm^2$

④ $420\,cm^2$　⑤ $120\,cm^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a, 가로의 길이를 b 라 하면
총길이는 $a+b+a+1+2+a+1+b+a=100$ 에서
$4a+2b=96$
$\therefore 2a+b=48$ 이므로 $b=48-2a$
한 개 단면의 넓이는 ab 이므로

$$\begin{aligned} a(48-2a) &= -2a^2+48a \\ &= -2(a^2-24a) \\ &= -2(a^2+24a+144-144) \\ &= -2(a-12)^2+288 \end{aligned}$$

따라서 $a=12$ 일 때 최대 넓이 $288\,cm^2$

14. 십의 자리 숫자가 일의 자리 숫자의 두 배인 어떤 두 자리 자연수가 21 보다 크고 60 보다 작다고 한다. 처음 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

일의 자리 숫자를 x 라 하면 십의 자리 숫자는 $2x$ 이다.
즉, 이 두 자리 자연수는 $(10 \times 2x) + x = 21x$ 이다.
$21 < 21x < 60$
$1 < x < \frac{20}{7}$, $\frac{20}{7} = 2.857142\cdots$
$\therefore x = 2$
처음 두 자리 자연수는 42 이다.

15. <보기> x에 대한 부등식 $ax^2+4ax+5a>0$의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a>0$일 때 해는 모든 실수이다.
㉡ $a=0$일 때 해는 $x=0$뿐이다.
㉢ $a<0$일 때 해는 없다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+4ax+5a>0$에서
$a(x^2+4x+5)>0,\ a\{(x+2)^2+1\}>0$
㉠ $a>0$일 때 $(x+2)^2+1>0$ $\therefore$ 모든 실수
㉡ $a=0$일 때 $0\cdot\{(x+2)^2+1\}>0$ $\therefore$ 해는 없다.
㉢ $a<0$일 때 $(x+2)^2+1<0$ $\therefore$ 해는 없다.

16. 이차방정식 $(x-1)(x-3)+m(x-k)=0$이 모든 실수 m에 대하여 항상 서로 다른 두 실근을 가지도록 k의 값의 범위를 정하면?

① $0<k<1$　② $1<k<3$　③ $-1<k<1$
④ $-1<k<2$　⑤ $-1<k<3$

해설

$x^2+(m-4)x+3-mk=0$은
서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=(m-4)^2-12+4mk>0$
이것을 정리하면
$m^2+4(k-2)m+4>0$ $\cdots$(ⅰ)
(ⅰ)는 모든 실수 m에 대하여 성립해야 하므로
$4(k-2)^2-4<0$
$\therefore$ $(k-1)(k-3)<0$
$\therefore$ $1<k<3$

17. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

18. $-1 \le x \le 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275　② 310　③ 325　④ 330　⑤ 335

해설

$$x+a \le x^2 \le 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge a \\ x^2 - 2x \le b \end{cases}$$

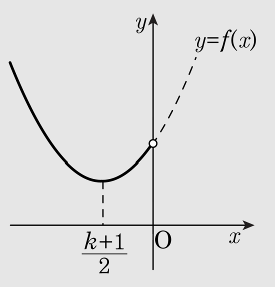
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2 - x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



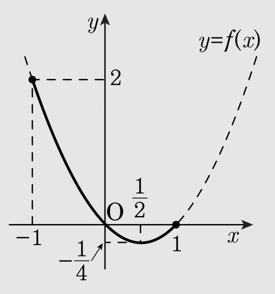
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$g(x) = (x-1)^2 - 1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2 - 2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$

$\therefore\ 100p = 325$

19. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=k \\ x+y+2z=2k^2 \end{cases}$ 의 해 x, y, z가 모두 양수일 때, k의 값의 범위는?

① $-\frac{3}{2}<k<0$　② $1<k<\frac{3}{2}$　③ $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{4}$
④ $-2<k<-\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{2}<k<1$

해설

i) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \cdots ㉠ \\ x+2y+z=k \cdots ㉡ \\ x+y+2z=2k^2 \cdots ㉢ \end{cases}$ 라 하면

㉠ $\times 3-$ ㉡ $-$ ㉢에서
$4x=-2k^2-k+3$
$=-(2k+3)(k-1)>0 \cdots$ ㉣
㉡ $\times 3-$ ㉢ $-$ ㉠에서
$4y=-2k^2+3k-1$
$=-(2k-1)(k-1)>0 \cdots$ ㉤
㉢ $\times 3-$ ㉠ $-$ ㉡에서
$4z=6k^2-k-1$
$=(3k+1)(2k-1)>0 \cdots$ ㉥

ii) ㉣ 에서 $-\frac{3}{2}<k<1$

㉤에서 $\frac{1}{2}<k<1$

㉥에서 $k<-\frac{1}{3}, k>\frac{1}{2}$

이들의 공통부분은 $\frac{1}{2}<k<1$

20. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases}(x+a)(x-4)<0\\(x-a)(x-3)>0\end{cases}$ 의 해가 $3 < x < 4$가 되도록 하는 실수 a 의 값의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 3　　② -3　　③ 4　　④ -4　　⑤ -7

해설

$(x+a)(x-4) < 0 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-a)(x-3) > 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통해가 $3 < x < 4$이므로
$-a < 4,\ a < 3$ 이어야 한다.
$\therefore$ ㉠의 해는 $-a < x < 4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡의 해는 $x < a$ 또는 $x > 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣의 공통 범위가 $3 < x < 4$ 이려면
$-a \le 3,\ a \le -a$
$\therefore -3 \le a \le 0$
$\therefore M = 0,\ m = -3 \therefore M - m = 3$

21. x에 대한 두 부등식 $x^2 + (a-1)x < a$, $6x^2 - x - 1 > 0$을 동시에 만족하는 정수가 꼭 두 개 존재할 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \le a < -3,\ 2 < a \le 3$　② $-3 \le a < -2,\ 3 < a \le 4$
③ $-2 \le a < -1,\ 4 < a \le 5$　④ $-4 < a \le -3,\ 2 \le a < 3$
⑤ $-3 < a \le -2,\ 3 \le a < 4$

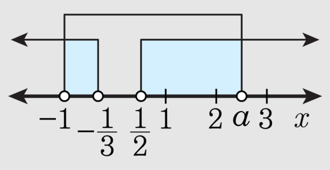
해설

$6x^2 - x - 1 = (2x-1)(3x+1) > 0$

$\Leftrightarrow\ x > \frac{1}{2}$ 또는 $x < -\frac{1}{3}$ ······㉠

$x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a) < 0$

(i) $a > -1$이면 $-1 < x < a$ ······㉡

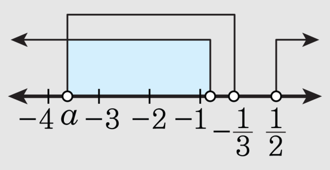


㉠과 ㉡의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 1과 2)

$2 < a \le 3$

(ii) $a = -1$이면 해가 없다.

(iii) $a < -1$이면 $a < x < -1$ ······㉢



㉠, ㉢의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 -3과 -2)

$\therefore\ -4 \le a < -3$

(i),(ii)(iii)에서 $-4 \le a < -3$, $2 < a \le 3$

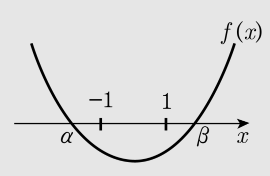
22. 방정식 $x^2 + px + 2p + 1 = 0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p 의 값의 범위는?

① $p > -2$　　② $p > -1$　　③ $p < -2$

④ $p < -1$　　⑤ $p < 1$

해설

$f(x) = x^2 + px + 2p + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면



(i) $f(-1) = p + 2 < 0 \quad \therefore p < -2 \cdots$ ①

(ii) $f(1) = 3p + 2 < 0 \quad \therefore p < -\frac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p < -2$

23. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $\mathrm{D}>0$에서 $\frac{\mathrm{D}}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\frac{13}{6}$

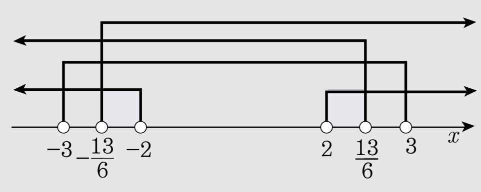
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\quad \therefore \frac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\frac{(-2a)}{2}=a$ 에서

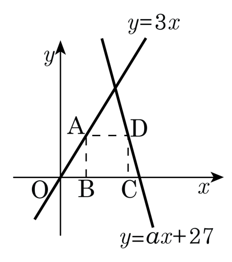
$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\frac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

24. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A 를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5

④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4,\ y = 3$를 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
$\therefore\ a = -6$

25. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

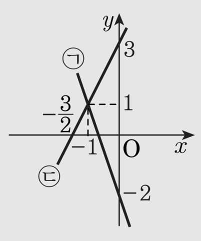
$$3x+y+2=0,\ x+3y+k=0,\ 2x-y+3=0$$

① $k \neq -2$　② $k \neq -3$　③ $k \neq -4$
④ $k \neq -7$　⑤ $k \neq -11$

해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

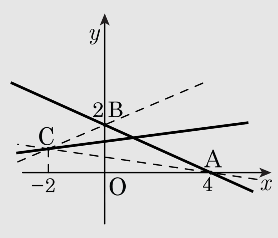


㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$,　$\therefore\ k \neq -2$

26. 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=kx+2k+1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}<k<2$
④ $-\frac{1}{6}<k<1$ ⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

해설



$y=-\frac{1}{2}x+2\cdots$ ㉠

$y=kx+2k+1\cdots$ ㉡

㉡ 을 k 에 대하여 정리하면
$k(x+2)+(1-y)=0$ 이므로
k 의 값에 관계없이 정점 C$(-2,\ 1)$ 을 지난다.
㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은
그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기 k는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고
$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1 사분면에서 만난다.

$\therefore\ -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$

27. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}} + \overline{\mathrm{C_2C_3}} + \overline{\mathrm{C_3C_4}} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{C_1C_2}} + \overline{\mathrm{C_2C_3}} + \overline{\mathrm{C_3C_4}} \\
&= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\
&\quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\
&= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10}
\end{aligned}$$

$\therefore r = 16$

28. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교할 때 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $3,\ 1$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 -1

29. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교하도록 하는 a의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $3,\ 1$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

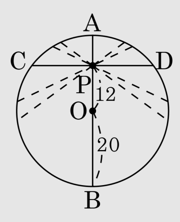
30. 반지름이 20 인 원의 내부에 중심으로부터 12만큼 떨어져 있는 점 P 가 있다. 점 P를 지나고 길이가 정수인 현의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

점 P를 지나는 가장 긴 현은 지름 AB이고, 가장 짧은 현은 지름에 수직인 현CD이다.



$\overline{CD} = 2\sqrt{20^2 - 12^2} = 32$, $\overline{AB} = 40$

점 P를 중심으로 현을 회전시키면 32와 40사이에 모든 실수 길이의 현이 두 번씩 나타난다.

따라서 길이가 정수인 현은

32, 40 인 것이 한 개,

33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 인 것이 각각 두 개씩 있다.

$\therefore$ 16 개

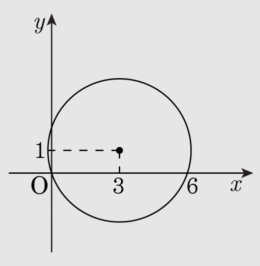
31. 원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-1)^2+(y-3)^2=10$,
이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면,
$(x-3)^2+(y-1)^2=10$ $\cdots$ ㉠



㉠의 그래프는 다음 그림과 같으므로
$y=0$ 일 때의 x 의 값을 구하면
$(x-3)^2+(0-1)^2=10$ 에서
$x^2-6x=0,\ x(x-6)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$
따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.

32. 감시 카메라의 서쪽 20km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 방향으로 매시 5km 의 속력으로 가고 있다. 감시 카메라로부터 15km 이내에 있는 배는 감시화면에 나타난다고 할 때, 이 배는 감시 화면에 몇 시간 동안 나타나는지 구하여라

▶ 답: ______ 시간

▷ 정답: 2 시간

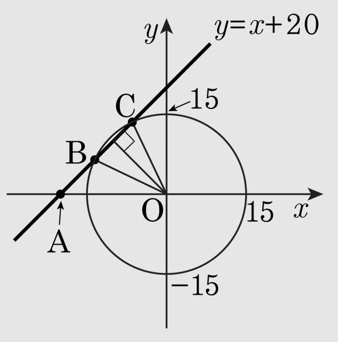
해설

감시카메라의 위치와 배의 처음 위치를 각각 $O(0, 0), A(-20, 0)$ 이라 하면, 배의 자취의 방정식은 $y = x + 20(x \geq -20)$ 이다.
배가 B, C 위치 사이에 있을 때, 감시 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구하면 된다.
$O(0, 0)$ 에서 직선 $x - y + 20 = 0$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|20|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{15^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10(km)$$

따라서 배의 속력이 5 km/h 시이므로
이 배가 감시 화면에 나타나는 시간은 2 시간이다.



33. 원 $x^2+y^2=5$ 와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1y_1>0$ 이고 넓이는 $\dfrac{25}{2x_1y_1}$ 이므로

x_1y_1 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.
그런데 $x_1^2+y_1^2=5$ 이고 $x_1>0, y_1>0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{x_1^2+y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1,\ x_1y_1 \leq \dfrac{5}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{x_1y_1} \geq \dfrac{2}{5}$

$\therefore \dfrac{25}{2x_1y_1} \geq \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

34. 점 P 를 x축에 대해 대칭이동하고, x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\mathrm{P}(a, b)$를 x축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,
x축으로 -2만큼, y축으로 3만큼 평행이동
$\Rightarrow (a-2, -b+3)$
$y=-x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b-3, -a+2)$
다시 점P와 일치하므로
$b-3=a, -a+2=b$ 에서
$a-b=-3$ …… ㉠
$a+b=2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$
$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

35. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A'}(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm 4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0)$