1. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$이다. $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots$ ㉠

$x=2$를 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡: $2(a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$

$\therefore\ a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$

$\therefore\ m=99,\ k=-1$이므로 $m+k=98$

2. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0일 때, 상수 a, b, c의 곱을 구하면?

① 8 ② -8 ③ 12 ④ -12 ⑤ 16

해설

$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x + 2 \cdots ①$

$\quad = (x+b)(x-c)Q(x) - x + 4 \cdots ②$

$\quad = (x-c)(x-a)R(x) \cdots ③$

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a + 2$, ③ 에서

$f(a) = 0$

$\Rightarrow a = -2$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b + 2$, ② 에서

$f(-b) = b + 4$

$\Rightarrow b = -1$

iii) ② 에서 $f(c) = -c + 4$, ③ 에서

$f(c) = 0$

$\Rightarrow c = 4$

$\therefore abc = 8$

3. 두 다항식 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 대하여 $x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) + R(x)$ 가 성립할 때, $Q(1)$ 의 값은? (단 $R(x)$ 의 차수는 이차 이하이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

$R(x) = ax^2 + bx + c$($a,\ b,\ c$는 실수)라 하면
$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $-2 = c$
$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx - 2 \cdots$ ①
①의 양변에 $x = i$을 대입하면
$-i - 2 = -a + bi - 2$
$a = 0,\ b = -1$이므로 $R(x) = -x - 2$
$\therefore\ x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) - x - 2$
양변에 $x = 1$을 대입하면
$-1 = 2Q(1) - 3$이므로
$\therefore\ Q(1) = 1$

4. 두 다항식 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$, x^3+2x^2-x-2의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$f(x)=2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
최대공약수가 이차식이므로 $f(x)$는 $x+1$
또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.
$f(-2)=-8-4a-8-4a\neq 0$이므로
$x+1$이 인수이다.
$\therefore\ f(-1)=0$일 때 $a=-2$

5. 두 다항식 $x^3 + px^2 + qx + 1$과 $x^3 + qx^2 + px + 1$의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 p, q에 대하여 $p + q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A = x^3 + px^2 + qx + 1$, $B = x^3 + qx^2 + px + 1$이라고 하면

$$\begin{aligned} A - B &= (x^3 + px^2 + qx + 1) - (x^3 + qx^2 + px + 1) \\ &= (p - q)x^2 - (p - q)x \\ &= (p - q)x(x - 1) \end{aligned}$$

이 때, $A - B$는 두 다항식 A, B의 최대공약수를 인수로 갖는다.
그런데, $p = q$이면 $A = B$가 되어 최대공약수가 x에 대한 삼차식이 되므로 최대공약수가 x에 대한 일차식이라는 조건에 모순이다.
또한, 두 다항식 A, B의 상수항이 모두 1이므로 x를 인수로 가질 수 없다.
따라서, $x-1$이 두 다항식 A, B의 최대공약수이고, 최대공약수는 A, B의 인수이므로 $x = 1$을 두 다항식에 각각 대입하면 그 값이 0이어야 한다.

$1 + p + q + 1 = 0$, $1 + q + p + 1 = 0$

$\therefore\ p + q = -2$

6. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x)$, $g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

① -31 ② -11 ③ 5 ④ 13 ⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면
$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
$\therefore\ ab - c + d = 5$

7. 복소수 $z = a + bi$, $w = b + ai$ (a, b는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $\overline{z}$, $\overline{w}$ 는 각각 z, w 의 켤레복소수이다.)

① $i\overline{z} = w$
② $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{z}{w}$
③ $z \cdot \overline{w} = \overline{z} \cdot w$
④ $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$
⑤ $i(\overline{z} + \overline{w}) = z + w$

해설

① : $i\overline{z} = i(a - bi) = b + ai = w$
② :①에서 $\overline{z} = -iw$ ······ ㉠
같은 방법으로 $\overline{w} = -iz$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{-iz}{-iw} = \dfrac{z}{w}$
③ :㉠, ㉡을 대입하면
(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,
(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$
$\therefore$ 좌변$\neq$우변
④ : ②에서 $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$
⑤ : $i(\overline{z} + \overline{w}) = i\overline{z} + i\overline{w} = w + z = z + w$

8. 복소수 $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면
$4z^2+4z+1 = -3$
$\rightarrow 4z^2+4z+4 = 0$
$\rightarrow z^2+z+1 = 0$
$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$
$\rightarrow z^3-1 = 0$
$\rightarrow z^3 = 1$
※방정식에 익숙한 학생들은
$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.
$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$
$= 10z^4+12x^3+10z^2$
$= (10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$
$= 10z^2(z^2+z+1)+2z^3$
$= 0+2$
$= 2$

9. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3,\ f(\beta)=3,\ f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$　　② $x^2-4x-1=0$

③ $x^2-x-4=0$　　④ $x^2-x+4=0$

⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2,\ b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1,\ b=-2,\ a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

10. 이차방정식 $f(2x+1)=2$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=4$가 성립한다. 이 때, $3f(x)-2=4$의 두 근의 합은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)+c=2$
$\therefore a(4x^2+4x+1)+b(2x+1)+c-2=0$
$4ax^2+4ax+a+2bx+b+c-2=0$
$4ax^2+(4a+2b)x+a+b+c-2=0$
따라서 두 근의 합 $\alpha+\beta=\dfrac{-(4a+2b)}{4a}=4$
$\therefore 4a+2b=-16a,\quad 2b=-20a$이므로
$b=-10a$
$3f(x)-2=4$이므로 $3f(x)=6$
$\therefore f(x)=2 \quad \therefore ax^2+bx+c-2=0$에서
두 근의 합 $\alpha'+\beta'=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-10a}{a}=10$

11. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 - 3$
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a = 1$
$y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서
$a = 1$, $b = -4$, $c = 1$
따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

12. 삼차방정식 $x^3+(p-4)x-2p=0$의 중근을 α, 다른 한 근을 β라 할 때 $\alpha+\beta+p$의 값을 구하면?

① -10 또는 -2　② -10 또는 -1　③ -10 또는 2
④ -10 또는 4　⑤ -10 또는 5

해설

$f(x)=x^3+(p-4)x-2p$로 놓으면 $f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-2)(x^2+2x+p)=0$
따라서 $x=2,\ x^2+2x+p=0$
그런데 중근을 가져야 하므로
ⅰ) $x=2$가 x^2+2x+p의 근일 때
$2^2+2\times2+p=0$
$\therefore\ p=-8,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x-8)=(x-2)^2(x+4)$
$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-4$
따라서, $\alpha+\beta+p=2+(-4)+(-8)=-10$
ⅱ) $x^2+2x+p=0$이 중근을 가질 때
$D/4=0$이므로 $D/4=1-p=0$
$\therefore\ p=1,\ f(x)=(x-2)(x^2+2x+1)=(x-2)(x+1)^2$
$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=2,\ p=1$
따라서, $\alpha+\beta+p=-1+2+1=2$
ⅰ) ⅱ)로부터 $\alpha+\beta+p$의 값은 -10 또는 2이다.

13. 각 면에 1부터 12까지 자연수가 하나씩 적힌 정십이면체의 주사위가 있다. 이 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 각각 $x,\ y$라 할 때, $xy-3x+2y=18$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$xy-3x+2y=18,\ x(y-3)+2y=18,$

$x(y-3)+2(y-3)=12$

$(x+2)(y-3)=12$

$x+2 \geq 3$이므로

$(x+2,\ y-3)=(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)$

$\therefore (x,\ y)=(1,7),(2,6),(4,5).(10,4)$

$\therefore 4$개

14. $A : 5(x+1) > 2x-1$, $B : \frac{x-4}{3} + \frac{3x+1}{2} > 1$ 에 대하여 A 에서 B 를 제외한 수들의 갯수는? (단, x 는 정수)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A : x > -2$, $B : x > 1$ 이므로
A 에서 B 를 제외한 수는 $-1,\ 0,\ 1$
따라서 3개이다.

15. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

[풀이]
$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=$ (㉠) 이 된다.
$-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=$ (㉠) 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=$ (㉢) 가 된다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠ $-3x-1$

▷ 정답: ㉡ -1

▷ 정답: ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면
$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면
$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$
정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

16. 15% 의 소금물 200g 이 있을 때, 물 xg 을 증발시켜서 30% 이상 60% 이하의 소금물을 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $100 \le x \le 150$

해설

15% 의 소금물 200g 의 소금의 양은 $\frac{15}{100} \times 200 = 30(\mathrm{g})$ 이다.

따라서 물 xg 을 뺏을 때의 농도를 나타내면 $\frac{30}{200-x} \times 100$ 이다.

이 값이 30% 이상 60% 이하 이므로, $30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \\ \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \ge 100 \\ x \le 150 \end{cases}$ 이다.

따라서 증발시켜야 하는 물의 양 x 의 범위는 $100 \le x \le 150$ 이다.

17. 어느 학교 학생들이 운동장에서 야영을 하기 위해 텐트를 설치하였다. 한 텐트에 3 명씩 자면 12명이 남고, 5명씩 자면 텐트가 10개가 남는다고 할 때, 텐트의 수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 답: 개

▶ 답: 개

▷ 정답: 31 개

▷ 정답: 32 개

▷ 정답: 33 개

해설

텐트 수를 x개, 학생 수를 $(3x+12)$ 명이라 하면
$5(x-11)+1 \le 3x+12 \le 5(x-11)+5$

$5(x-11)+1 \le 3x+12$에서
$5x-55+1 \le 3x+12$,
$2x \le 66$
$\therefore\ x \le 33$

$3x+12 \le 5(x-11)+5$에서
$3x+12 \le 5x-55+5$,
$2x \ge 62$
$\therefore\ x \ge 31$

$\therefore 31 \le x \le 33$

18. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$　　② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$　　④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta),\ a > 0$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$ ② $-2 < x < 3$ ③ $2 \leq x < 3$
④ $2 < x \leq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$ 에서
$x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$
$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$
$x^2 + 1 > 0$ 이므로 $x - 2 \geq 0$
$\therefore x \geq 2 \cdots$ ㈎
$x^2 - x - 6 < 0$ 에서 $(x-3)(x+2) < 0$
$\therefore -2 < x < 3 \cdots$ ㈏
따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면
$2 \leq x < 3$ 이다.

20. 두 부등식 $x^2+2x-15>0$, $x^2-x+k\le 0$에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 6$일 때, 상수 k 의 값은?

① -48 ② -30 ③ -18 ④ 12 ⑤ 24

해설

부등식 $x^2+2x-15>0$ 에서
$(x+5)(x-3)>0$, $x>3$ 또는 $x<-5$
부등식 $x^2-x+k\le 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3<x\le 6$ 이므로
$x^2-x+k\le 0$ 를 만족하는 범위는
$-5\le x\le 6$ $(x-6)(x+5)\le 0$
$x^2-x-30\le 0$
$\therefore k=-30$

21. 모든 내각의 크기가 $180°$ 보다 작은 육각형의 각 변의 길이가 $10,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2x,\ y$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값은? (단, $x,\ y$ 는 자연수)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 13

해설

다각형의 결정조건에 의해 $2x+y>5$
$x,\ y$ 는 자연수이므로,
$x=2,\ y=2$ 일 때 최소가 된다.
$\therefore x^2+y^2=8$

22. $|p| < 2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2+px+1 > 2x+p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

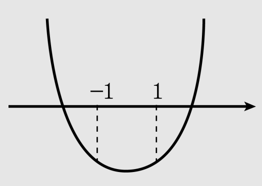
$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$이라 하면, $f(p) > 0$이다.
$-2 < p < 2$에서 $f(p) > 0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

23. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p의 범위를 정하면?

① $p>-\frac{1}{3}$　　② $p>1$　　③ $-\frac{1}{3}<p<1$

④ $p<-\frac{1}{3}$　　⑤ $p<1$

해설



$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

ⅰ) $f(-1)=1+p+1+2p-1=3p+1<0$

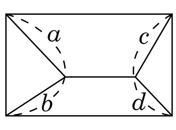
$\therefore p<-\frac{1}{3}$

ⅱ) $f(1)=1-p-1+2p-1=p-1<0$

$\therefore p<1$

ⅰ) ⅱ)에서 $p<-\frac{1}{3}$

24. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



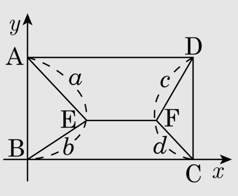
① $\sqrt{a}+\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{d}$ ② $a+c=b+d$

③ $a+b=c+d$ ④ $a^2+d^2=b^2+c^2$

⑤ $a^2+b^2=c^2+d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면
A$(0,\ q)$, C$(p,\ 0)$ 라 할 수 있고 D$(p,\ q)$ 이다.
이때, E$(x,\ y)$, F$(z,\ y)$ 라고 하면

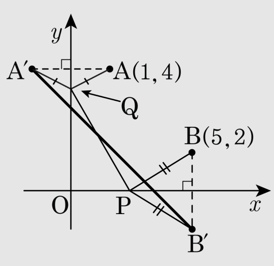


$a^2=x^2+(y-q)^2$
$b^2=x^2+y^2$
$c^2=(z-p)^2+(y-q)^2$
$d^2=(z-p)^2+y^2$ 이므로
$\therefore\ a^2+d^2=b^2+c^2$

25. 두 점 A$(1,4)$, B$(5,2)$에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설



다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면
A′$(-1,4)$, B′$(5,-2)$

$$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{B'P}}$$
$$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$$
$$= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2}$$
$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

26. $\triangle$ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 P$(-1,\ a)$, Q$(3,\ 3)$, R$(1,\ 6)$ 이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$\left(\dfrac{-1+3+1}{3},\ \dfrac{a+3+6}{3}\right)=\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$

$b=1,\ \dfrac{a+9}{3}=\dfrac{10}{3}$

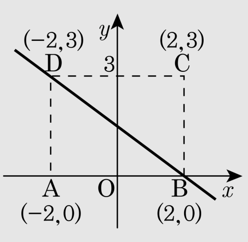
$a=1,\ \ b=1\ \therefore\ ab=1$

27. 네 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, C$(2,\ 3)$, D$(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

직선 $mx+y-2m=0$
즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 B$(2,\ 0)$을 지난다.
이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 D$(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서, D$(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로
$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

28. 점 $(1,\ -1)$ 에서 직선 $ax+by=0(a \neq 0,\ b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a-b=0$　② $a-b=\sqrt{2}$　③ $a+b=0$
④ $ab=0$　⑤ $ab=\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{|a\times 1+b\times(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$

$|a-b|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2=2a^2+2b^2$

$a^2+2ab+b^2=0,\ (a+b)^2=0$

따라서 $a+b=0$

29. 두 원 $x^2+y^2-2=0$, $x^2+y^2+kx-4y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x+2y+1=0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2-(x^2+y^2+kx-4y-1)=0$

$\therefore kx-4y+1=0$

이 직선이 직선 $x+2y+1=0$ 과 평행하므로

$\frac{k}{1}=\frac{-4}{2}\neq\frac{1}{1}$

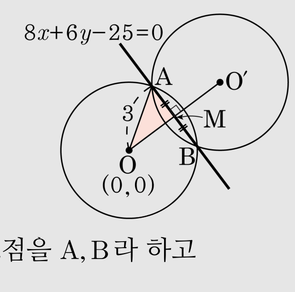
$\therefore\ k=-2$

30. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

$\left(x^2+y^2-9\right) - \left(x^2+y^2-8x-6y+16\right)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고

공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{\mathrm{OO'}}$은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 수직이등분하므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{3^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}$ ⋯⋯ ㉠

그런데 $\overline{\mathrm{OM}}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

31. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

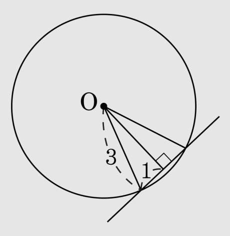
원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0 \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0$,
$\therefore\ a^2=1$

32. 직선 $y = x + m$ 이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 2 일 때, m^2 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



위 그림을 보면 원과 직선사이 거리가

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

이제 공식을 사용하면,

$$\frac{|m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \quad m = \pm 4$

$\therefore \quad m^2 = 16$

33. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은
$x_1x+y_1y=5 \cdots$ ①
이것이 점 $(3, 1)$을 지나므로
$3x_1+y_1=5 \cdots$ ②
또, (x_1, y_1)은 $x^2+y^2=5$
위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=5 \cdots$ ③
② 에서 $y_1=5-3x_1$ 을 ③에 대입하면
$x_1^2+(5-3x_1)^2-5=0$,
$10x_1^2-30x_1+20=0$
$10(x_1-1)(x_1-2)=0$
$\therefore x_1=1$이면 $y_1=2$, $x_1=2$이면 $y_1=-1$
$\therefore$ 접점은 $(1,2), (2,-1)$

34. 원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원을 O′이라고 하자. 두 원 O, O′ 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 (6, 2) 를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 $(a,\ b)$이다. 이 때, ab의 값을 구하면?

① -8　　② -12　　③ 8　　④ 12　　⑤ 0

해설

원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
O′ : $(x+1)^2+y^2=1$
두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면
O : $x^2+y^2-2y=0$, O′ : $x^2+y^2+2x=0$
이 때, 직선 AB의 방정식은 $2x+2y=0$,
즉 $y=-x$
따라서 점 (6, 2)를 직선 $y=-x$에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2,\ -6)$이므로
$a=-2,\ b=-6$ $\therefore ab=12$

35. 직선 $x-3y+1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-m)^2+(y-n)^2=5$ 의 넓이를 이등분할 때, $3m+n$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$x-3y+1=0$ 의 x 축 대칭 $(y \to -y)$
$\to \ x+3y+1=0$
$x+3y+1=0$ 의 $y=-x$ 축 대칭 $(x \to -y,\ y \to -x)$
$\to \ -y-3x+1=0,\ \ y=-3x+1$
이 직선이 $(x-m)^2+(y-m)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 $(m,\ n)$ 을 지난다.
$\therefore\ 3m+n=1$