

1.  $a^2 = 3$  일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha$ ,  $(2-a)^n = \beta$ 로 놓으면

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n$$

$$= 4(4-3)^n = 4$$

2. 삼각형의 세 변의 길이  $a, b, c$  에 대하여  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$  이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형                      ② 이등변삼각형  
③ 정삼각형                      ④ 직각이등변삼각형  
⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 에서 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \text{ 이고,}$$

$$a, b, c \text{ 는 실수이므로, } a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

3.  $x$ 에 대한 다항식  $f(x)$ 를  $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는  $2x - 7$ 이고,  $x^2 - 3x - 10$ 으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식  $f(x)$ 를  $x^2 - 6x + 5$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

- ①  $2x + 1$
- ②  $4x + 3$
- ③  $x - 1$
- ④  $4x - 9$
- ⑤  $2x - 3$

해설

$f(x)$ 를  $x^2 - 6x + 5$ 로 나눈 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $ax + b$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 5)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 5)Q(x) + ax + b \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

$f(x)$ 를  $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눈 몫을  $Q_1(x)$ ,  $x^2 - 3x - 10$ 으로 나눈 몫을  $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_1(x) + 2x - 7 \\ &= (x - 1)(x - 3)Q_1(x) + 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x - 10)Q_2(x) + 11 \\ &= (x - 5)(x + 2)Q_2(x) + 11 \end{aligned}$$

이므로  $f(1) = -5$ ,  $f(5) = 11$ 이다.

㉠에서

$$f(1) = a + b = -5$$

$$f(5) = 5a + b = 11 \text{ 이므로 연립하여 풀면}$$

$$a = 4, b = -9$$

따라서 구하는 나머지는  $4x - 9$ 이다.

4.  $a^2 - b^2 = 1$  일 때,  $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$  의 값은? (단,  $n$ 은 자연수)

① 2

②  $2(a+b)^n$

③ 4

④  $4(a+b)^n$

⑤  $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$  형태이므로

합차공식을 사용하여 정리하면

(준식)  $= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2 - b^2)^n = 4$

5.  $a + b + c = 0$  일 때, 다음 중  $2a^2 + bc$ 와 같은 것은?

①  $(a - c)^2$

②  $(b + c)^2$

③  $(a + b)(b + c)$

④  $(a - b)(a - c)$

⑤  $(a - b)(a + c)$

해설

$$\begin{aligned} 2a^2 + bc &= 2a^2 - b(a + b) \quad (\because c = -a - b) \\ &= 2a^2 - ab - b^2 \\ &= (a - b)(2a + b) \\ &= (a - b)(a + b + a) \\ &= (a - b)(a - c) \quad (\because a + b = -c) \end{aligned}$$

6. 두 다항식  $A = x^3 + x^2 + ax - 2$ ,  $B = x^3 - x^2 - ax + 4$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수  $a$ 의 값은?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

최대공약수를  $x - \alpha$ 라 하자.

나머지정리에 의해  $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$$

두 식을 더하면  $2\alpha^3 = -2$ ,  $\alpha = -1$

이제  $\alpha = -1$ 을 다시  $A$ 식에 대입하면

$$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

7. 복소수  $z = \frac{2}{1+i}$  에 대하여  $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$  의 값은?

- ① 1              ② 2              ③ 3              ④ 4              ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{1+i} = 1-i \\ z^2 &= -2i, \quad z^3 = -2-2i \\ \therefore z^3 - 2z^2 + 2z + 5 \\ &= (-2i-2) - 2(-2i) + 2(1-i) + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} z = 1-i &\Rightarrow z-1 = -i \\ &\Rightarrow z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5 &= z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5 \end{aligned}$$

8. 이차방정식  $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차이가  $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수  $a$ 의 값들의 합은?

- ①  $-\frac{9}{4}$       ②  $-\frac{3}{4}$       ③  $\frac{3}{4}$       ④  $\frac{9}{4}$       ⑤  $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \quad \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서  $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, \quad 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서,  $a$ 의 값들의 합은  $-\frac{3}{4}$

9. 이차함수  $y = (x - 5)^2 + 1$  의 그래프와 직선  $y = a$  가 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자.  $PQ = 10$  일 때, 상수  $a$  의 값은?

① 16      ② 20      ③ 22      ④ 26      ⑤ 30

해설

이차함수  $y = (x - 5)^2 + 1$  의 그래프는  
직선  $x = 5$  에 대하여 대칭이고  
 $PQ = 10$  이므로 두 점 P, Q 의  $x$  좌표는  
각각 0, 10 이다.  
따라서 점 P (또는 Q ) 의  $y$  좌표를 구하면  
 $(0 - 5)^2 + 1 = 26$  이므로  
 $\therefore a = 26$

10.  $x + y = 3$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  일 때,  $2x^2 + y^2$  의 최댓값을  $M$  , 최솟값을  $m$  이라 하면  $M - m$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식  $y = -x + 3$  에서  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  이므로

$y = -x + 3 \geq 0 \rightarrow -x \geq -3 \rightarrow x \leq 3 \therefore 0 \leq x \leq 3$  ( $\because x \geq 0$ )

또  $2x^2 + y^2 = 2x^2 + (-x + 3)^2 = 2x^2 + x^2 - 6x + 9 = 3x^2 - 6x + 9$

완전 제곱식으로 바꾸면  $3(x^2 - 2x) + 9 = 3(x - 1)^2 + 6$

$\therefore x = 1$  일 때 최솟값 6 ,  $x = 3$  일 때 최댓값 18  $\therefore M - m = 12$

11. 두 실수  $x, y$  가  $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$  을 만족할 때,  $y$  의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$  을  $x$  에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$$

이 때,  $x$  가 실수이므로 판별식  $D$  라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (y^2 - y - 2) \geq 0$$

$$y^2 - y - 6 \leq 0, (y + 2)(y - 3) \leq 0$$

$\therefore -2 \leq y \leq 3$  따라서,  $y$  의 최댓값은 3 이다.

12. 연립방정식  $\begin{cases} ab+bc=65 \\ ac+bc=17 \end{cases}$  을 만족시키는 양의 정수쌍  $(a, b, c)$  의 개수를 구하면?

① 0                      ② 1                      ③ 2                      ④ 3                      ⑤ 4

해설

$ac+bc=17$ 에서  $c(a+b)=17$   
그런데  $a, b$ 는 양의 정수이므로  $a+b \geq 2$   
 $\therefore c=1, a+b=17$   
위의 식들을  $ab+bc=65$ 에 대입하면  
 $a^2-16a+48=0$   
 $\therefore a=4$  또는  $a=12$   
따라서,  $a=4$ 일 때  $b=13, c=1$   
 $a=12$ 일 때  $b=5, c=1$

13.  $x$ 에 관한 부등식  $(a+2b)x+a-b < 0$ 의 해가  $x > 1$ 일 때,  $x$ 에 관한 부등식  $(a-b)x+2a-b > 0$ 을 풀면?

①  $x > \frac{1}{3}$   
④  $x < -\frac{4}{3}$

②  $x < \frac{1}{3}$   
⑤  $x > \frac{7}{3}$

③  $x > -\frac{4}{3}$

해설

$$a+2b < 0, \frac{-(a-b)}{a+2b} = 1$$

$\therefore b = -2a$  이므로

$$(a-b)x+2a-b = a(3x+4) > 0$$

$a > 0$ 을 이용하면

$$\therefore 3x+4 > 0 \therefore x > -\frac{4}{3}$$

14. 연립부등식  $A : 5(x+2) \leq 26+x$ ,  $B : 1-x < 3(2x+1)$ ,  $C : 3x-5 < -(x+1)$  에 대하여 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-\frac{2}{7} < x < 1$

해설

$$A : 5(x+2) \leq 26+x \Rightarrow x \leq 4$$

$$B : 1-x < 3(2x+1) \Rightarrow x > -\frac{2}{7}$$

$$C : 3x-5 < -(x+1) \Rightarrow x < 1$$

$$\therefore -\frac{2}{7} < x < 1$$

15. 부등식  $\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \leq x - \frac{x+2}{3} \leq \frac{1}{4}x + 6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수  $x$ 의 값의 개수는?

① 18개    ② 17개    ③ 16개    ④ 3개    ⑤ 2개

해설

i)  $\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \leq x - \frac{x+2}{3}, 3x - 8 \leq 6x - 2x - 4$   
 $\therefore x \geq -4$   
ii)  $x - \frac{x+2}{3} \leq \frac{1}{4}x + 6, 12x - 4x - 8 \leq 3x + 72$   
 $\therefore x \leq 16$   
i), ii)에서 공통된  $x$ 의 값의 범위를 구하면  
 $-4 \leq x \leq 16$   
한편,  $x$ 는 음이 아닌 정수이므로  $0 \leq x \leq 16$   
따라서  $x = 0, 1, 2, \dots, 16$ 의 17개이다.

16. 연속하는 세 정수의 합이 30 보다 크고 36 보다 작을 때, 세 정수 중 가운데 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

연속한 세 정수  $x-1$ ,  $x$ ,  $x+1$   
 $30 < (x-1) + x + (x+1) < 36$   
 $30 < 3x < 36$   
 $10 < x < 12$   
 $\therefore x = 11$

17. 150 개의 배를 바구니에 담는데 한 바구니에 담을 때 10 개씩 담으면 배가 남게 되고, 11 개씩 담게 되면 마지막 바구니를 다 채우지 못한다. 이 때, 바구니의 개수는 몇 개인가?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 14개

해설

문제에서 구하고자 하는 바꾸니의 개수를  $x$  라고 놓자.  
 10 개씩 모든 바꾸니를 채우면 배의 개수는  $10x$  이고, 11 개씩 모든 바꾸니를 채우면 배의 개수는  $11x$  이다. 그러나 배의 개수가 10 개씩 채운 개수보다 많고 11 개씩 채운 개수보다는 적으므로 이를 식으로 나타내면  $10x < 150 < 11x$  이다.

이를 연립부등식으로 표현하면  $\begin{cases} 10x < 150 \\ 11x > 150 \end{cases}$  이고, 간단히 하

150  
 면,  $\begin{cases} x < 15 \\ x > \frac{150}{11} \end{cases}$  이다. 이를 다시 나타내면  $\frac{150}{11} < x < 15$  이다.

$\frac{150}{11} = 13.6363\cdots$  이므로, 바구니의 개수는 14 개이다.

18. 테니스 공을 한 사람당 7개씩 나누어 주었을 때 30개가 남았고, 9개씩 나누어 주었을 때에는 마지막 받은 사람이 5개 이상 7개 미만으로 테니스 공을 받았다고 한다. 테니스 공의 개수는 몇 개인가?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 149개

## 해설

사람의 수를  $x$  명이라고 하였을 때, 테니스 공의 개수는  $(7x+30)$  개다.

“9개씩 나누어 주었을 때에는 마지막 받은 사람이 5개 이상 8개 미만”이라는 것은  $(x-1)$  명까지는 9개를 받았고 나머지 한명이 다르게 받은 것이므로, 마지막 사람이 5개를 받은 경우는  $9(x-1)+5$ (개)이고, 7개를 받는 경우는  $9(x-1)+7$ (개)이다. 따라서 테니스 공의 개수는 마지막 사람이 5개 이상 받은 경우와 7개 미만 받은 경우 사이에 있으므로, 이를 식으로 나타내면  $9(x-1)+5 \leq 7x+30 < 9(x-1)+7$ 이다. 연립방정식으로 나타

내면  $\begin{cases} 9(x-1)+5 \leq 7x+30 \\ 7x+30 < 9(x-1)+7 \end{cases}$  이다. 간단히 하면,  $\begin{cases} x \leq 17 \\ x > 16 \end{cases}$

이다. 따라서  $x$  의 범위는  $16 < x \leq 17$  이다.

따라서 테니스의 공의 개수는  $7 \times 17 + 30 = 149$  (개)이다.

19. 두 이차방정식  $x^2 + 2ax + a + 2 = 0, x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$  중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수  $a$ 의 값의 범위는?

- ①  $a < \frac{1}{2}, 2 < a$       ②  $a \leq 1, 3 \leq a$       ③  $a \leq \frac{1}{2}, 3 < a$   
④  $a \leq \frac{1}{2}, 2 < a$       ⑤  $a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (a + 2) \geq 0 \text{에서}$$

$$(a - 2)(a + 1) \geq 0, a \leq -1, a \geq 2 \cdots \text{①}$$

$$\text{또, } D_2 = (a - 1)^2 - 4a^2 \geq 0 \text{에서}$$

$$(3a - 1)(a + 1) \leq 0, -1 \leq a \leq \frac{1}{3} \cdots \text{②}$$

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

$a$ 의 범위는 ① 또는 ②이므로

$$a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$$

20. 이차부등식  $x^2 - 2x - 3 > 3|x - 1|$ 의 해가 이차부등식  $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해와 같을 때, 실수  $a, c$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1)  $x \geq 1$  일 때,  
 $x^2 - 2x - 3 > 3x - 3, x^2 - 5x > 0$   
 $x(x - 5) > 0, x < 0$  또는  $x > 5$   
 $\therefore x > 5$   
2)  $x < 1$  일 때,  
 $x^2 - 2x - 3 > -3x + 3, x^2 + x - 6 > 0$   
 $(x + 3)(x - 2) > 0, x < -3$  또는  $x > 2$   
 $\therefore x < -3$   
1), 2)에서  $x < -3$  또는  $x > 5$   
한편  $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해가  
 $x < -3$  또는  $x > 5$ 이므로  
 $a < 0$ 이고,  $ax^2 + 2x + c = a(x + 3)(x - 5)$ 이다.  
 $ax^2 + 2x + c = ax^2 - 2ax - 15a$ 에서  
 $a = -1, c = 15 \quad \therefore a + c = 14$

21. 연립부등식  $\begin{cases} x^2 - 12x - 45 > 0 \\ (x+2)(x-a^2+2a) < 0 \end{cases}$  을 만족하는  $x$ 의 값이 존재하지 않을 때, 정수  $a$ 의 개수는?

① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

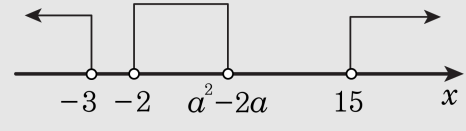
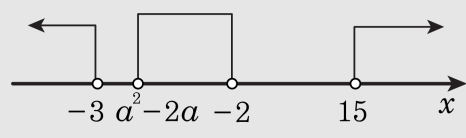
해설

$x^2 - 12x - 45 > 0$ 에서

$$(x+3)(x-15) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 15 \cdots \textcircled{\text{A}}$$

$$(x+2)\{x-(a^2-2a)\} < 0 \cdots \textcircled{\text{B}}$$



$-3 \leq a^2 - 2a \leq 15$ 이면서

부등식  $\textcircled{\text{A}}$ ,  $\textcircled{\text{B}}$ 를 동시에 만족하는

$x$ 은 존재하지 않는다.

( i )  $-3 \leq a^2 - 2a$ 에서

$$a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 \geq 0 \text{ 이므로}$$

모든 실수  $a$ 에 대하여 항상 성립한다.

( ii )  $a^2 - 2a \leq 15$ 에서

$$a^2 - 2a - 15 \leq 0, (a+3)(a-5) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 5$$

따라서 정수  $a$ 는

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

22. 세 변의 길이가  $x$ ,  $x+1$ ,  $x+2$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되는  $x$ 의 범위가  $\alpha < x < \beta$ 일 때,  $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

$x > 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$   
 $x+2$ 가 최대변이므로  
 $x+2 < (x+1) + x \quad \therefore x > 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$   
둔각삼각형이 되는 조건은  
 $(x+2)^2 > (x+1)^2 + x^2$   
 $\therefore -1 < x < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$   
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 공통범위를 구하면  
 $1 < x < 3$   
 $\therefore \alpha = 1, \beta = 3$   
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

23. 수직선 위의 세 점 A(1), B(6), C(8) 과 동점 P(x) 가 있다.  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$  이 최소가 될 때, 점 P에서 점 A까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x-1)^2 + (x-6)^2 + (x-8)^2 \\ &= 3(x-5)^2 + 26 \end{aligned}$$

따라서  $x=5$  일 때 최소가 된다.  
점 P(5) 에서 점 A(1) 까지 거리는  $|5-1|=4$  이다.

24. 두 원  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ①  $\sqrt{95}$       ②  $\frac{\sqrt{95}}{2}$       ③  $\frac{\sqrt{95}}{3}$       ④  $\frac{\sqrt{95}}{4}$       ⑤  $\frac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - (x^2 + y^2 - 4y - 1) = 0$$

$$-2x + 4y + 1 = 0, \quad 2x - 4y - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ 에서

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B,

$\overline{AB}$ 의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C (1, 0)

이라 하면

중심 C (1, 0)에서 직선 ㉠까지의 거리

$\overline{CM}$ 은

$$\overline{CM} = \frac{|2 - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

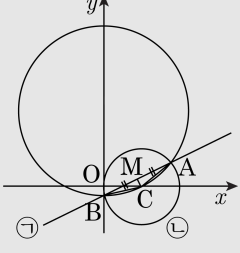
원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타

고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이  $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2 \cdot \frac{\sqrt{95}}{10} = \frac{\sqrt{95}}{5}$$



25. 원  $x^2 + y^2 = 8$  과 제1사분면에서 접하는 접선이  $x$  축,  $y$  축과 만나는 점을 각각 A,B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최소값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을  $(x_1, y_1)$  이라고 하면 접선의 방정식은  $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$  (단,  $x_1 > 0, y_1 > 0$ )

한편, 두 점 A,B 는 각각 접선  $\textcircled{1}$  과  $x$  축,  $y$  축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1y_1}$$

이 때,  $(x_1, y_1)$  이 원  $x^2 + y^2 = 8$  위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

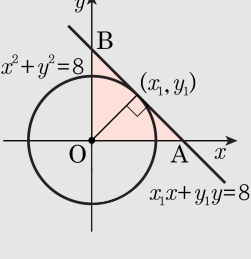
$x_1 > 0, y_1 > 0$  에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, x_1y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



26. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4, (x - 5)^2 + y^2 = 25$

- ①  $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$  (복부호 동순)
- ②  $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$  (복부호 동순)
- ③  $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$  (복부호 동순)
- ④  $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$  (복부호 동순)
- ⑤  $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$  (복부호 동순)

해설

$x^2 + y^2 = 4 \dots\dots \textcircled{\tiny{\Gamma}}$

$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \dots\dots \textcircled{\tiny{\Delta}}$

공통접선의 방정식을  $y = ax + b$

$\dots\dots \textcircled{\tiny{\Theta}}$ 로 놓으면

원  $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ 과 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$ , 즉  $ax - y + b = 0$  이  
접하므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{\tiny{\text{A}}}$

또, 원  $\textcircled{\tiny{\Delta}}$ 도 직선  $\textcircled{\tiny{\Theta}}$ , 즉  $ax - y + b = 0$  과 접하므로

$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$

$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{\tiny{\text{B}}}$

그런데  $b \neq 0$  이므로  $\textcircled{\tiny{\text{A}}} \div \textcircled{\tiny{\text{B}}}$ 을 하면

$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$

$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$

$\therefore b = -\frac{10}{7}a$  또는  $b = \frac{10}{3}a$

(i)  $b = -\frac{10}{7}a$  일 때,  $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$24a^2 + 49 = 0$

이것을 만족하는 실수  $a$  는 없다.

(ii)  $b = \frac{10}{3}a$  일 때,  $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

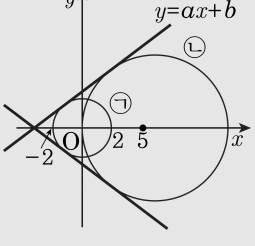
$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면  $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2}$  (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$  (복부호 동순)



27. 점 A(-3, 0)에서 원  $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = r^2$ 에 그은 두 접선이 서로 수직일 때,  $r$ 의 값은? (단,  $r > 0$ )

- ① 4                      ②  $3\sqrt{2}$                       ③  $2\sqrt{5}$                       ④  $2\sqrt{6}$                       ⑤ 5

해설

원  $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = r^2$ 은 중심이

O(-1, 6)이고

반지름의 길이가  $r(r > 0)$ 인 원이다.

점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로

수직이면 다음 그림과 같이

□ABOC는 한 변의 길이가  $r$ 인 정사각형

이 된다.

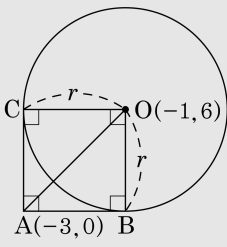
이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가

$r\sqrt{2}$ 가 되어야 하므로

$$\sqrt{\{-1 - (-3)\}^2 + (6 - 0)^2} = r\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40} = r\sqrt{2}$$

$$\therefore r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



28. 두 원  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$ ,  $x^2 + (y-6)^2 = 8$  사이의 최단거리를  $d$  라 할 때,  $d^2$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서  
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\{0 - (-1)\}^2 + \{6 - (-1)\}^2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \\ \therefore d^2 &= 8 \end{aligned}$$

29. 두 원  $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ ,  $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$  에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원  $C_3$  가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원  $C_3$  의 중심까지의 거리를  $d$ , 원  $C_3$  의 반지름의 길이를  $r$  라 하자. 이때,  $d \times r$  의 값은?

- ①  $\sqrt{3}$       ②  $2\sqrt{3}$       ③  $\sqrt{6}$       ④  $\sqrt{7}$       ⑤  $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중심을 각각 A, B, C 라 하면,  
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)  
이다.

$\overline{AC} = 2$  이고 삼각형 ABC 가  
정삼각형이므로 C( $a$ ,  $b$ ) 라 하면

$$a = 1 + \overline{AC} \cos 60^\circ, b = \overline{AC} \sin 60^\circ$$

$$\therefore C(2, \sqrt{3})$$

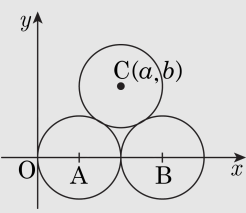
따라서 원  $C_3$  는 중심이  $(2, \sqrt{3})$  이고

반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서

원의 중심 C( $2, \sqrt{3}$ ) 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$



30. 좌표평면 위의 점  $P(x, y)$  가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다.  $P$ 가 점  $A(6, 5)$  에서 출발하여 어떤 점  $B$  에서 더 이상 이동하지 않게 되었다.  $A$  에서  $B$  에 이르기까지 이동한 횟수는?

- ㉠  $y = 2x$  이면 이동하지 않는다.

㉡  $y < 2x$  이면  $x$  축 방향으로  $-1$ 만큼 이동한다.

㉢  $y > 2x$  이면  $y$  축 방향으로  $-1$ 만큼 이동한다.

① 4회      ② 5회      ③ 6회      ④ 7회      ⑤ 8회

해설

$(6, 5) \rightarrow (5, 5) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (2, 4)$   
 $\therefore 5$  회 이동한다.

31. 점 (1, 2) 를 점 (a, b) 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선  $x+2y-1=0$  은 직선  $x+2y-4=0$  으로 이동하였다. 이때,  $a+2b$  의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 6
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

$x$  축으로  $m$ ,  $y$  축으로  $n$  만큼 평행이동했다고 하면,  
 $(x-m)+2(y-n)-1=0$ ,  $x+2y-m-2n-1=0$ 을  
 $x+2y-4=0$  과 비교해 보면,  
 $-m-2n=-3 \cdots \textcircled{1}$   
점 (1, 2) 를  $x$  축으로  $m$ ,  $y$  축으로  $n$  만큼 평행이동 시키면,  
 $(1+m, 2+n)$   
 $\Rightarrow 1+m=a, 2+n=b$   
 $\Rightarrow a+2b=m+1+4+2n=8$   
( $\because \textcircled{1}$ 에서  $m+2n=3$ )

32. 원  $x^2 + y^2 = 1$  을 평행이동  $f : (x, y) \rightarrow (x - 4, y + 1)$  에 의하여 옮긴 후 다시 직선  $y = -3$  에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  이라 할 때,  $a + b + r$  의 값은?

① 10      ② 5      ③ 0      ④ -5      ⑤ -10

해설

원의 중심을 이동시키면 된다

$$(0, 0) \xrightarrow{f} (-4, 1) \xrightarrow{y=-3\text{대칭}} (-4, -7)$$

$$\therefore \text{이동된 원의 방정식 : } (x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 1$$

$$\Rightarrow a + b + r = -10$$

33. 좌표평면에서 한 점  $A(-1, 3)$ 을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 후 다시 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 점  $A$ 와 일치하였다. 이 때,  $ab$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

점  $A(-1, 3)$ 을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동하면  $(-1 + a, 3 + b)$ 가 되고 다시 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면  $(3 + b, -1 + a)$ 가 된다.

$$(3 + b, -1 + a) = (-1, 3)$$

$$3 + b = -1, -1 + a = 3$$

$$a = 4, b = -4$$

$$\therefore ab = -16$$

34. 직선  $x + 2y - 3 = 0$  을  $x$  축에 대하여 대칭이동한 후 다시  $y = x$  에 대하여 대칭이동 하였더니, 원  $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 1$  의 넓이를 이등분하였다. 이 때,  $a$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $a = 5$

해설

$$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0 (x \text{ 축 대칭이동})$$

$$\Rightarrow y - 2x - 3 = 0 (y = x \text{ 대칭이동})$$

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$$\therefore a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore a = 5$$

35. 좌표평면 위의 두 점 A (5, 1), B (8, 5) 와 y 축 위의 점 C 를 꼭짓점으로 하는 △ABC 의 둘레의 길이의 최솟값이  $5 + \sqrt{a}$  일 때, a 의 값은?

- ① 180      ② 185      ③ 190      ④ 195      ⑤ 200

해설

점 A (5, 1) 을 y 축에 대하여  
대칭 이동한 점을 A' 이라 하면

A' (-5, 1)

또, 다음 그림에서  $\overline{AC} = \overline{A'C}$  이므로

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$

$$= \sqrt{(8-5)^2 + (5-1)^2} + \overline{BC} + \overline{A'C}$$

$$\geq 5 + \overline{A'B}$$

$$= 5 + \sqrt{\{8 - (-5)\}^2 + (5-1)^2}$$

$$= 5 + \sqrt{185}$$

$$\therefore a = 185$$

