

1. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

2. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b$ 라 하면

$f(1) = 2, f(-1) = 4$ 에서

$$p + a + q + b = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-p + a - q + b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

① + ②를 하면

$$2(a+b) = 6, a+b = 3$$

3. $x + y = 3$ 일 때 $x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{13}{4}$

해설

$$x + y = 3 \rightarrow y = -x + 3$$

$$x - y^2 = x - (-x + 3)^2$$

$$= x - (x^2 - 6x + 9)$$

$$= -x^2 + 7x - 9$$

$$= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

4. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 이 한 개의 공통근 α 를 가지고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $3 : 5$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{5}$

⑤ 0

해설

공통근이 α 이므로 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots \textcircled{㉠}$

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서 $(a - b)(\alpha - 1) = 0$

$a = b$ 이면 모순이므로 $a \neq b \therefore \alpha = 1$

$x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 의 공통이 아닌 근을 각각 β , γ

라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 $1 \cdot \beta = b$, $1 \cdot \gamma = a$

따라서, 공통이 아닌 두 근의 비는

$\beta : \gamma = b : a = 3 : 5 \cdots \textcircled{㉢}$

한편, $\textcircled{㉠}$ 에 $\alpha = 1$ 을 대입하면 $a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉣}$

$\textcircled{㉢}$, $\textcircled{㉣}$ 에서 $a = -\frac{5}{8}$, $b = -\frac{3}{8}$

$\therefore a - b = -\frac{1}{4}$

5. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 일 때, xy 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0 \text{ 을}$$

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, x 는 실수이므로 $\textcircled{1}$ 은 실근을 가져야 한다.

$$D = (y+1)^2 - 2(y^2 - 2y + 5) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad (y-3)^2 \leq 0$$

$$\therefore y = 3$$

$y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2x^2 + 8x + 8 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \quad \therefore xy = (-2) \cdot 3 = -6$$

6. 두 부등식 $A : \frac{5x+1}{6} < 1$, $B : 3x - 8 < -x$ 에 대하여 A 에서 B 를 제외한 부분을 만족하는 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

$$A : \frac{5x+1}{6} < 1$$

$$\therefore x < 1$$

$$B : 3x - 8 < -x$$

$$\therefore x < 2$$

따라서 A 에서 B 를 제외한 부분을 만족하는 자연수의 개수는 0 개이다.

7. 연립부등식 $x < -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$ 의 해가 $-\frac{1}{3} < x < b$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{7}$

해설

$$(i) \quad x < -\frac{3x-a}{4}, 4x < -3x+a$$

$$\therefore x < \frac{a}{7}$$

$$(ii) \quad -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}, -3x < 2-a$$

$$\therefore x > \frac{a-2}{3}$$

$$\therefore \frac{a-2}{3} < x < \frac{a}{7}$$

$$\frac{a-2}{3} = -\frac{1}{3}, a = 1$$

$$\frac{a}{7} = b, b = \frac{1}{7}$$

$$\therefore ab = 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

8. 15% 의 설탕물 300 g 이 있다. 여기에서 200 g 의 설탕물을 버리고 물 x g 을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x 가 될 수 없는 것은?

① 25

② 32

③ 39

④ 47

⑤ 52

해설

설탕물을 200 g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.

따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15% 의 설탕물 100 g 이다.

이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15$ (g) 이다.

여기에 물 x g 을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.

농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12$ 이다.

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \\ \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \leq x \leq 50$ 이다.

9. 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하면?

$$|x^2 - 2x| = y - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y \leq x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y = |x^2 - 2x| + 1$ 이므로

㉡에 대입하면 $|x^2 - 2x| \leq x$

(i) $x^2 - 2x \geq 0$ ($x \leq 0, x \geq 2$) 일 때

$$x^2 - 2x \leq x$$

$$\therefore x(x - 3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 3$$

조건과 공통범위를 구하면 $x = 0, 2 \leq x \leq 3$

(ii) $x^2 - 2x < 0$ ($0 < x < 2$) 일 때

$$-(x^2 - 2x) \leq x$$

$$\therefore x(x - 1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 0, x \geq 1$$

조건과 공통 범위를 구하면 $1 \leq x < 2$

(i), (ii)에서 정수 x 를 구하면 $x = 0, 1, 2, 3$

x 의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y = 1, 2, 1, 4$

구하는 순서쌍 (x, y) 는

$(0, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4)$

따라서 구하는 개수는 4 개다.

10. 부등식 $5 - x > 2|x + 1|$ 의 해와 $ax^2 + bx + 7 > 0$ 의 해가 같도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -7

② -5

③ 5

④ 7

⑤ 0

해설

$5 - x > 2|x + 1|$ 을 풀면

(i) $x \geq -1$ 일 때

$$5 - x > 2x + 2, x < 1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$$

(ii) $x < -1$ 일 때

$$5 - x > -2x - 2, x > -7 \quad \therefore -7 < x < -1$$

(i), (ii)에 따라 $-7 < x < 1$

$ax^2 + bx + 7 > 0 \Leftrightarrow -7 < x < 1$ 이므로 $a < 0$ 이고

$$ax^2 + bx + 7 = a(x + 7)(x - 1)$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -6 \quad \therefore a + b = -7$$

11. 두 점 $A(2, 3)$, $B(0, -1)$ 를 이은 선분 AB , 또는 그 연장선 위에 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 인 점 C 는 두 개가 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$

② 4

③ $2\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{6}$

⑤ 5

해설

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 만족시키는 C 는 $\overline{AB}$ 의 $1 : 1$ 내분점이거나 $3 : 1$ 외분점이다.

i) $1 : 1$ 내분점은 $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1)$

ii) $3 : 1$ 외분점은

$$\left(\frac{3 \times 0 - 1 \times 2}{3 - 1}, \frac{3 \times (-1) - 1 \times 3}{3 - 1}\right) = (-1, -3)$$

i), ii) 사이 거리는

$$\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$$

12. (a, b) 가 직선 $x + y = 1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax + by = 1$ 은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?



① $(1, 1)$

② $(1, 0)$

③ $(0, 1)$

④ $(-1, -1)$

⑤ $(-1, 0)$

해설

점 (a, b) 가 $x + y - 1 = 0$ 위의 점이므로

$a + b - 1 = 0$ 에서 $b = 1 - a$

이때, $ax + by - 1 = ax + (1 - a)y - 1 = 0$

$\rightarrow (x - y)a + y - 1 = 0$

$\therefore x - y = 0, y - 1 = 0$

즉 $x = y, y = 1$

따라서 구하려는 정점은 $(1, 1)$ 이다.

13. 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$

③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$

④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x - a)^2 + (y + 2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3 - a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1 + 2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

14. 두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 와 $(x+2)^2 + y^2 = 24$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$,

$(x+2)^2 + y^2 = 24$

즉, $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$,

$x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ 의 공통

현의 방정식은

$(x^2 + y^2 - 2x - 8) -$

$(x^2 + y^2 + 4x - 20) = 0$

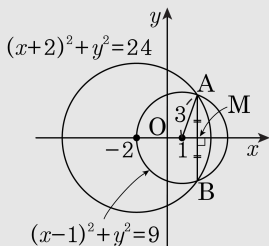
$-6x + 12 = 0 \quad \therefore x = 2$

$(x-1)^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 $x = 2$ 와의 거리 $d = 1$

따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$ 이고,

$\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로 공통현의 길이는

$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - 1} = 4\sqrt{2}$



15. 반지름의 길이가 10, 중심좌표가 $O(0, 0)$ 인 원 밖의 한 점 $P(11, 12)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선을 극선이라고 한다. 이 극선의 방정식이 $px + qy = 100$ 일 때, $p + q$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 23

해설

원 위의 두 접점을 $Q_1(a_1, b_1)$, $Q_2(a_2, b_2)$ 라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x + b_1y = 100$, $a_2x + b_2y = 100$ 이고
두 직선은 동시에 $P(11, 12)$ 를 지나므로

$11a_1 + 12b_1 = 100$, $11a_2 + 12b_2 = 100$ 이 함께 성립한다.

이것은 $11x + 12y = 100$ 위에 두 점 $Q_1(a_1, b_1)$,

$Q_2(a_2, b_2)$ 가 동시에 있는 것을 의미하므로

직선 Q_1, Q_2 의 방정식은

$11x + 12y = 100$ 이다.

따라서 $p = 11$, $q = 12$ $\therefore p + q = 23$