

1. 다음은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은?

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \textcircled{1} &= -\frac{c}{a} + \textcircled{1} \\ (x + \textcircled{2})^2 &= \textcircled{3} \\ x &= \textcircled{4} \pm \textcircled{5} \end{aligned}$$

① $\frac{b^2}{4a^2}$ ② $\frac{b}{2a}$ ③ $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$
④ $-\frac{b}{2a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

해설

$ax^2 + bx + c = 0 \leftarrow$ 양변을 a 로 나눈다.
 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \leftarrow$ 양변에 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ 을 더한다.
 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
 $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 $\therefore$ ③이 잘못되었다.

2. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (단, $b^2 - 4ac \geq 0$)

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서 양변을 a 로 나누면

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

양변에 $(\frac{b}{a} \times \frac{1}{2})^2 = (\frac{b}{2a})^2$ 을 더하면

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (단, } b^2 - 4ac \geq 0 \text{)}$$

3. 이차방정식 $x^2 + k(4x + 1) + 3 = 0$ 의 해의 개수가 1개일 때, 상수 k 의 값을 구하여라. (단, $k > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + 4kx + k + 3 = 0$ 이 중근을 갖는다.

따라서 $D = (4k)^2 - 4(k + 3) = 0, 4k^2 - k - 3 = 0$

$(4k + 3)(k - 1) = 0$

$k > 0$ 이므로 $k = 1$ 이다.

4. 이차방정식 $x^2 - 8x - 3 + a = 0$ 가 중근을 갖도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$$\frac{D}{4} = 16 - (-3 + a) = 0$$

$$\therefore a = 19$$

5. 지면에서 초속 30m 로 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이가 $(30t - 5t^2)$ m 라고 할 때, 물체를 던져 올리고 나서 지면에 떨어지는데 걸리는 시간은?

① 2 초 후

② 3 초 후

③ 4 초 후

④ 5 초 후

⑤ 6 초 후

해설

지면에 떨어질 때의 높이는 0 이므로

$$30t - 5t^2 = 0, t^2 - 6t = 0$$

$$t(t - 6) = 0, t = 0, 6$$

$$t > 0 \text{ 이므로 } t = 6$$

6. 지면에서 초속 60m 로 똑바로 위로 던진 야구공의 t 초 후의 높이가 $(60t - 5t^2)$ m 이다. 야구공이 지면으로부터 높이가 100m 이상인 지점을 지나는 것은 몇 초 동안인지 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 정답 : 8 초

해설

$$60t - 5t^2 = 100 \text{ 이므로}$$

$$5t^2 - 60t + 100 = 0$$

$$t^2 - 12t + 20 = 0$$

$$(t - 2)(t - 10) = 0$$

$t = 2$ 초 또는 10 초이다.

따라서 높이가 100m 이상인 지점을 지나는데 걸리는 시간은 2 초부터 10 초까지이므로 8 초 동안이다.

7. 서로 다른 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 0$ 일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근의 개수를 구하면?

- ① 서로 다른 두 개의 근을 갖는다.
② 중근을 갖는다.
③ 근이 존재하지 않는다.
④ 모든 실수에 대해서 만족한다.
⑤ 알 수 없다.

해설

방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식 $D = b^2 - 4ac$ 에 $b = -a - c$ 를 대입하면 $D = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2 \geq 0$ $a \neq c, a - c \neq 0$ 이므로 $(a - c)^2 > 0$ 이다.
따라서 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 개의 실근을 가진다.

8. 직선 $y = (b - 2a)x$ 가 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 증가한다. $ax^2 + bx + a = 0$ 의 근의 개수를 m 개, $bx^2 + 4ax + b = 0$ 의 근의 개수를 n 개라 할 때, $m - n$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

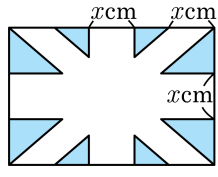
$y = (b - 2a)x$ 가 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 증가하므로 기울기 $b - 2a > 0$ 이다.

$ax^2 + bx + a = 0$ 의 판별식을 보면 $b^2 - 4a^2 = (b - 2a)(b + 2a) > 0$ 이므로 $m = 2$ 이고,

$bx^2 + 4ax + b = 0$ 의 판별식을 보면 $(4a)^2 - 4b^2 = 4(2a - b)(2a + b) < 0$ 이므로 $n = 0$ 이다.

따라서 $m - n = 2 - 0 = 2$ 이다.

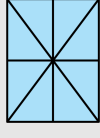
9. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 12 cm^2 가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



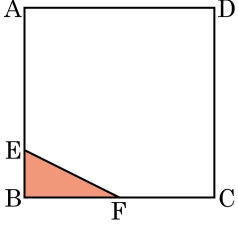
- ① 2 cm ② 3 cm
 ③ 4 cm ④ 2 cm 또는 7 cm
 ⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9 - 3x$, 세로가 $6 - x$ 인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9 - 3x)(6 - x) = 12$
 정리하면 $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7) = 0$
 $x < 3$ 이므로 $x = 2$



10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 20 cm 인 정사각형 ABCD 가 있다. 점 F 는 변 BC 위를 점 C 로부터 B 까지 매초 2 cm 의 속력으로 움직이고, 점 E 는 변 AB 위를 점 B 로부터 A 까지 매초 1 cm 의 속력으로 움직이고 있다. 두 점 E, F 가 동시에 출발하였다면 몇 초 후에 $\triangle BEF$ 의 넓이가 정사각형 넓이의 $\frac{1}{16}$ 배가 되는지 구하여라.



▶ 답 : 초

▷ 정답 : 5 초

해설

x 초 후에 $\overline{BF} = (20 - 2x) \text{ cm}$, $\overline{BE} = x \text{ cm}$
 $\triangle BEF$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \overline{BF} \times \overline{BE}$ 이고,
 정사각형 넓이인 $20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$ 의 $\frac{1}{16}$ 배 인 25 cm^2 이므로
 $\frac{1}{2} (20 - 2x)x = 25$
 $x^2 - 10x + 25 = 0$
 $(x - 5)^2 = 0$
 $\therefore x = 5$ (초)(단, $0 < x < 10$)

11. 원가가 A 원인 어떤 물건에 $x\%$ 의 이익을 붙여 정가를 매겼다가 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하여 팔면 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보게 된다. 이때 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

원가 A 원에 $x\%$ 의 이익을 붙이면 정가는

$A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원이고, 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하면 판매가는

$A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ 원이다.

이때 $\frac{A}{25}$ 원의 손해를 보았으므로

$(\text{판매가}) - (\text{원가}) = -\frac{A}{25}$ 에서

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right) - A = -\frac{A}{25}$$

$$A\left(1 - \frac{x^2}{10000}\right) = \frac{24}{25}A$$

$$1 - \frac{x^2}{10000} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore x = \pm 20$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 20$ 이다.

12. 다음 두 식을 만족하는 b 의 값을 구하여라.

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad 3a + b = x - 2$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad x^2 - 6x - x + 9a^2 + 3(a + b) + 5 = 0$$

▶ 답 :

▶ 정답 : $-3 \pm \sqrt{2}$

해설

$$\textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } x^2 - 6ax - x + 9a^2 + 3(a + b) + 5 = 0$$

$$(x^2 - 6ax + 9a^2) - (x - 3a) + 3b + 5 = 0$$

$$(x - 3a)^2 - x + (3a + b) + 2b + 5 = 0$$

$\textcircled{\text{㉠}}$ 에서

$$x - 3a = b + 2 \text{ 이므로}$$

$$(b + 2)^2 - (b + 2) + 3b + 5 = 0$$

$$b^2 + 4b + 4 + 2b + 3 = 0$$

$$b^2 + 6b + 7 = 0$$

$$b = -3 \pm \sqrt{2}$$

13. 다음 식의 값을 구하여라.

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \cdots}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 식을 x 라 하면
 $x = 2 + \sqrt{x}$, $\sqrt{x} > 0$ 이므로 $x > 2$
 $x - 2 = \sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 4x + 4 = x$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x - 1)(x - 4) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 4$
 $\therefore x > 2$ 이므로 $x = 4$

14. 다음 식의 값을 구하여라.

$$5 - \frac{6}{5 - \frac{6}{5 - \frac{6}{5 - \dots}}}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

주어진 식을 x 라고 하면 $x = 5 - \frac{6}{x}$

$x = 5 - \frac{6}{x}$ 의 양변에 x 를 곱하면

$$x^2 = 5x - 6, \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$