1. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$

② 3의 허수부분은 0이다.

③ $\sqrt{-2}$ 는 순허수이다.

④ $b = 1$ 이면 $a + (b-1)i$ 는 실수이다.

⑤ 제곱하여 -3 이 되는 수는 $\pm\sqrt{3}i$ 이다.

해설

④ [반례] $a = i,\ b = 1$ 이면 $a + (b-1)i = i$ 이므로 순허수이다.(거짓)

2. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

3. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b 라 할 때, $a + b$ 를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $3x^2 + 1$
④ $x^2 + x - 1$ ⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$
$\therefore\ a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.
이 때, $2x - 1$ 로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$ 로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$ 이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

4. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 $x-2$, $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b라 할 때, $a+b$의 값은?

① -8　　② -2　　③ -16　　④ 4　　⑤ 2

해설

$f(x) = (x-2)Q(x) + a$

$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$

$f(2) = 4 = a,\ f(1) = -2 = b$

$\therefore a + b = 2$

5. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y=\dfrac{2-i}{1+i}$을 만족하는 x, y의 값은?

① $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ② $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ③ $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$
④ $x=1$, $y=1$ ⑤ $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$

해설

$(x+y)+(x-y)i=\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

$\Rightarrow\ x+y=\dfrac{1}{2},\quad x-y=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\ x=-\dfrac{1}{2},\quad y=1$

6. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$

④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$

(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

7. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

8. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

9. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)(x+k)$라 할 수 있다.
여기에서 상수항을 비교하면 $k=3$
$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)(x+3)$
$=x^3+3x^2+x+3$
$\therefore\ a=3,\ b=1$이므로 $a+b=4$

해설

$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)Q(x)$
$x^2=-1$을 대입하면
$-x-a+bx+3=0,\ (b-1)x+(3-a)=0$
x에 대한 항등식이므로
$a=3,\ b=1$
$\therefore\ a+b=4$

10. $(x^3-x^2-2x+1)^5 = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{15}\cdots$ ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{15}\quad\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2=2(a_0+a_2+\cdots+a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots a_{14}=1$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

12. 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　　② $-x+3$　　③ $x-1$

④ $2x$　　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$

$\quad=(x+2)(x-2)P(x)-x+4$

$\therefore\ f(-2)=6,\ f(2)=2$

$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$

$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

따라서 나머지는 $-x+3$

13. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① 3, -1, 3, 2
② 2, 3, -1, 3
③ -3, 1, -3, -2
④ -2, -3, 1, -3
⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 2 & 9 & 11 & 7 & & \\
 & & -2 & -7 & -4 & & \\
\hline
-1 & 2 & 7 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & \text{d} \\
 & & -2 & -5 & & & \\
\hline
-1 & 2 & 5 & \boxed{-1} & \leftarrow & \text{c} & \\
 & & -2 & & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{3} & \leftarrow \text{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \text{a} & & & & &
\end{array}
$$

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

14. 다음 중 $x^4-4x^3-7x^2+34x-24$를 인수분해 하였을 때, 인수가 아닌 것은?

① $x-1$　② $x-2$　③ $x+3$　④ $x+4$　⑤ $x-4$

해설

$f(x)=x^4-4x^3-7x^2+34x-24$라 하면
$f(1)=f(2)=0$이므로
$f(x)$ 는$x-1, x-2$를 인수로 갖는다.
조립제법을 해 보면 즉,
$x^4-4x^3-7x^2+34x-24$
$=(x-1)(x-2)(x^2-x-12)$
$=(x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$

15. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax+b$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A=Ga, B=Gb$(a, b는 서로소)

$A+B=(a+b)G=2(x+2)(x-2)$

$L=abG=(x-1)(x-3)(x+2)$

$\therefore\ G=x+2$

16. $f(x) = x^{61} + x^{47} + 1$ 이라고 할 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = f(-i) = (-i)^{61} + (-i)^{47} + 1 = 1$

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = i^{61} + i^{47} + 1 = 1$

17. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3+3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$
$$= \sqrt{3\cdot(-3)} - \sqrt{(-3)\cdot(-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$
$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$
$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$
$$= -3+3i$$

18. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로
$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$
그러므로 $x = 3$또는 $x = 4$
$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

19. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한근이 $3 + \sqrt{2}$이므로 켤레근인 $3 - \sqrt{2}$도 근이 된다.
이차방정식의 두 근의 합이 $-a$이므로,
$-a = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \quad \therefore\ a = -6$
두근의 곱이 b이므로
$b = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \quad \therefore\ b = 7$
$\therefore\ a + b = -6 + 7 = 1$

20. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형　③ 정삼각형
④ 예각삼각형　⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-(b-c)^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2=2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

21. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $-2x+1$ ② $-2x-1$ ③ $-2x+3$
④ $-2x+5$ ⑤ $-2x+7$

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ 라 하면,
$f(1)=3,\ f(2)=1$ 이므로
$f(1)=a+b=3,\ f(2)=2a+b=1$ 연립하면
$a=-2,\ b=5$
$\therefore$ 나머지는 $-2x+5$ 이다.

22. 삼각형의 세변의 길이를 $x,\ y,\ z$라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y,\ z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$
$= \left\{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\right\}z$
$= (x+y)(x^2+z^2-y^2)z$
$\therefore\ (x+y)(x^2+z^2-y^2)z = 0$
$x^2+z^2-y^2 = 0$ ($\because\ x,\ y,\ z$는 모두 양수)
$\therefore\ x^2+z^2=y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

23. 이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 두근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha-\beta=7$이 성립한다. 이 때, $a\beta$의 값은? (단, a는 실수)

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

해설

$\alpha+\beta=8,\ \alpha-\beta=7$이므로

$$\alpha\beta=\frac{1}{4}\left\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(8^2-7^2)$$
$$=\frac{15}{4}$$

24. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50 ② 62 ③ 64 ④ 79 ⑤ 83

해설

두 수를 각각x, $16-x$ 라고 하면

$y = x(16-x)$

$= -x^2 + 16x$

$= -(x^2 - 16x + 64 - 64)$

$= -(x-8)^2 + 64$

$x = 8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

25. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α, β, γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3$,

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$,

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0 \cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면

$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$

$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0 \cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$