1. 등식 $(x+y)+(x-y)i=3-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5　　② 8　　③ 13　　④ 17　　⑤ 25

해설

복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+y=3,\ x-y=-5$
위 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=4$
$\therefore x^2+y^2=17$

2. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha+\beta=2 \quad \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$

3. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$
순허수이므로 $2a^2+a-6=0$
$\Rightarrow\ (a+2)(2a-3)=0$
$\Leftrightarrow\ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
그런데 $a=2$이면,
$a^2+4a+4=0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

4. $i^{2000}+i^{2002}+i^{2003}+i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

(준식) $=1+(-1)+(-i)+1$

$=1-i$

5. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$ ② $x = \sqrt{2}$ ③ $x = 0$
④ $x = 4 - \sqrt{2}i$ ⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$
$\therefore\ x = \sqrt{2}$

6. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

7. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -x^2 + 2x + 10$
$= -(x-1)^2 + 11,\ M = 11$
$y = 3x^2 + 6x - 5$
$= 3(x+1)^2 - 8,\ m = -8$
$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1\ \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

9. 복소수 $x = a+bi$(a, b는 실수)가 $x^2 = 3+4i$, $x^3 = 2+11i$ 를 만족할 때 $a+b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \times x \\ &= (3+4i)(a+bi) \\ &= (3a-4b)+(4a+3b)\,i \end{aligned}$$

$(3a-4b)+(4a+3b)\,i = 2+11i$

$3a-4b = 2, 4a+3b = 11$

$\therefore a = 2, b = 1$ 이므로 $a+b = 3$

해설

$x = \dfrac{x^3}{x^2} = a+bi$

$$\begin{aligned} \frac{2+11i}{3+4i} &= \frac{(2+11i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{50+25i}{25} \\ &= 2+i \end{aligned}$$

$\therefore a = 2, b = 1$

10. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

11. 이차함수 $y = x^2 + ax + 3$ 의 그래프와 직선 $y = x + 3a$ 가 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-12 < a < 1$　　② $-12 < a < 2$　　③ $-11 < a < 1$

④ $-11 < a < 2$　　⑤ $-10 < a < 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + ax + 3$ 의 그래프와
직선 $y = x + 3a$ 는 서로 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 + ax + 3 = x + 3a$,
즉 $x^2 + (a-1)x + 3 - 3a = 0$ 에서
$D = (a-1)^2 - 4(3-3a) < 0$
$a^2 + 10a - 11 < 0$, $(a+11)(a-1) < 0$
$\therefore\ -11 < a < 1$

12. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 6$ 이 $x = 1$ 일 때 최솟값 5 를 가진다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = ax^2 + bx + 6$
$= a(x - 1)^2 + 5$
($\because x = 1$일 때, 최솟값 5를 가진다.)
$= a(x^2 - 2x + 1) + 5$
$= ax^2 - 2ax + a + 5$
$\therefore\ a + 5 = 6,\ -2a = b$
$\therefore\ a = 1,\ b = -2$
$\therefore\ a + b = 1 + (-2) = -1$

13. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, x 초 후의 축구공의 높이를 ym 라고 하면 $y = -x^2 + 6x$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 9 m

해설

$y = -x^2 + 6x$ 에서 $y = -(x-3)^2 + 9$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 9m 이다.

14. 방정식 $(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

$(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$에서

$x^2+x+2=A$라 하면

$A^2=A+2$,

$A^2-A-2=0,\ (A+1)(A-2)=0$

$\therefore\ A=-1$ 또는 $A=2$

(i) $x^2+x+2=-1$일 때, $x^2+x+3=0$

(ii) $x^2+x+2=2$일 때, $x^2+x=0$

(i), (ii)에서 α, β는 허근이므로 $x^2+x+3=0$의 근이 된다.

따라서, $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times 3=-5$

15. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

16. a, b가 실수이고 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$의 한 근이 $1 + i$ 일 때, $a + b$의 값은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1 + i$가 근이면 $1 - i$도 근이다. 다른 한 근을 α라고 하면삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$(1 + i) + (1 - i) + \alpha = -a \cdots$ ①

$(1 + i)(1 - i) + (1 + i)\alpha + (1 - i)\alpha = -4 \cdots$ ②

$(1 + i)(1 - i)\alpha = -b \cdots$ ③

②에서 $\alpha = -3$

①, ③에 각각 대입하면 $a = 1, b = 6$

$\therefore a + b = 7$

해설

[별해1] 계수가 실수이므로 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 따라서 주어진 방정식의 좌변은$\{x - (1 - i)\}\{x - (1 + i)\} = x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나눗셈을 하여 정리하면

$x^3 + ax^2 - 4x + b = (x^2 - 2x + 2)(x + a + 2) + (2a - 2)x + b - 2a - 4$

$\therefore\ 2a - 2 = 0,\ b - 2a - 4 = 0$

$\therefore\ a = 1,\ b = 6$

주어진 방정식에 $1 + i$를 대입하여 복소수의 상등을 이용해도 된다.

17. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$에서
$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$이고
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0이다.

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

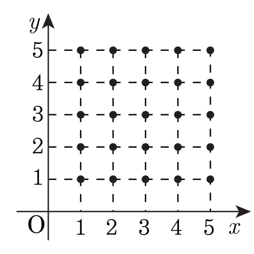
$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

19. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개　　② 1 개　　③ 2 개

④ 3 개　　⑤ 4 개

해설

$xy+x-2y-2=x(y+1)-2(y+1)$

$=(x-2)(y+1)$ 이므로

$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는

i) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$

ii) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$

iii) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$

iv) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,

$x=-1,\ y=-2$

$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

20. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

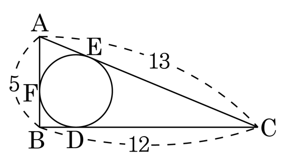
㉠ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

㉡ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

21. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$라 할 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$　　② $x^2 + 5x + 6 = 0$

③ $x^2 - 12x + 20 = 0$　　④ $x^2 + 12x + 20 = 0$

⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha$, $\overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta$,

$\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$

그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$이므로

$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$

$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$

$\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$

두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

22. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

23. $x+y=10$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하면?

① 10　② 24　③ 40　④ 45　⑤ 50

해설

$y=10-x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

24. 실수 x, y가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$ ② $2\sqrt{2} + 1$ ③ $2\sqrt{2} + 2$
④ $\sqrt{2} + 4$ ⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을
(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$에서 x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore\ -2 \leq y \leq 2$
따라서, y의 최댓값은 2이다.
(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$에서 y가 실수이므로
$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0,\ x^2 \leq 8$
$\therefore\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.
(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

25. 사차방정식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$을 풀면?

① $x=\pm 2$ 또는 $x=2\pm 3\sqrt{6}$

② $x=\pm 4$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

③ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

④ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

⑤ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}i}{2}$

해설

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)=-3$에서

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)+3=0$ 이므로

$(x^2+x-2)(x^2+x-6)+3=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$$\begin{aligned}(t-2)(t-6)+3 &= t^2-8t+12+3\\ &= t^2-8t+15\\ &= (t-3)(t-5)=0\end{aligned}$$

따라서 $(x^2+x-3)(x^2+x-5)=0$

$x^2+x-3=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-5=0$ 에서

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$