1. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

2. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$
$= x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$
(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로
$ab+2=0,\ a+2=0$
따라서 $a=-2,\ b=1$
$\therefore a+b=-1$

3. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$
양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$
$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설

$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

4. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore\ 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2,\ b = -1$

5. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$　② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$

③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$　④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$

⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+1)-6\\ &= X^2+X-6\\ &= (X+3)(X-2)\\ &= (x^2+x+3)(x^2+x-2)\\ &= (x-1)(x+2)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

6. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해 될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

7. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$ ② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$ ④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x) &= (x+a)(2x-a)\\ &= 2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

8. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times 2\times 10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times 10^{10}+12\times 10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times 6+10^5\times 12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

9. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,
$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$
$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$
$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots$ ①
$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.
$x + \frac{1}{x} = 1$
$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$
① 에 대입하면, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$

10. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$
위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \tilde{}\cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x=1,\ y=2,\ z=3$
$\therefore\ x+y+z=6$

11. 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 성립하도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = 2$ ③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 0,\ b = 2$ ⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$

이 식을 $x,\ y$에 대하여 정리하면

$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$

이 등식이 임의의 $x,\ y$에 대하여 성립하므로

$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

12. 등식 $2x^2+x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 x에 대한 항등식일 때 $a+b+c$의 값은?

① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

해설

좌변을 전개하여 계수를 비교해서 a, b, c를 구할 수 있다.
여기에서는 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x=2$를 대입해서 구한다.
$15=a+b+c$

13. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $-2x+1$ ② $-2x-1$ ③ $-2x+3$
④ $-2x+5$ ⑤ $-2x+7$

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ 라 하면,
$f(1)=3,\ f(2)=1$ 이므로
$f(1)=a+b=3,\ f(2)=2a+b=1$ 연립하면
$a=-2,\ b=5$
$\therefore$ 나머지는 $-2x+5$ 이다.

14. 임의의 실수 a, b에 대하여 연산 $\triangle$를 $a\triangle b = a^2 - ab + b^2$라 할 때, $(x^2\triangle x) + (2x\triangle x) - (x\triangle 1) - 3$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+1)(x^2-x+4)$ ② $(x-2)(x+1)(x^2-x+4)$

③ $(x-1)(x+2)(x^2-x+2)$ ④ $(x-1)(x+1)(x+2)^2$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)^2$

해설

$x^2\triangle x = x^4 - x^3 + x^2$

$2x\triangle x = 4x^2 - 2x^2 + x^2 = 3x^2$

$x\triangle 1 = x^2 - x + 1$이므로

$$\begin{aligned} \text{준 식} &= x^4 - x^3 + x^2 + 3x^2 - x^2 + x - 1 - 3 \\ &= x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4 \\ &= (x-1)(x+1)(x^2-x+4) \end{aligned}$$

15. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$(x-1)\left(3x^2 + ax + 2a\right)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$

$\therefore 3x^2 + ax + 2a$는

$x + 2$ 또는 $x + 1$을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$로 놓을 때

$x + 2$가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x + 1$를 인수로 갖는다.

$x + 1$이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$

$\therefore a = -3$

16. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최소공배수가 x^3+5x^2-x-5 이고 곱이 $x^4+6x^3+4x^2-6x-5$일 때, 두 이차식은?

① $x^2-2x+1,\ x^2+6x+5$　② $x^2-2x+1,\ x^2-6x+5$

③ $x^2-1,\ x^2+6x+5$　④ $x^2-1,\ x^2-6x+5$

⑤ $x^2-1,\ x^2-6x-5$

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ ($a,\ b$ 는 서로소)라고 하면
최소공배수 $L=abG$, $AB=abG^2$ 이다.

$L=x^3+5x^2-x-5=x^2(x+5)-(x+5)$
$\quad=(x+1)(x-1)(x+5)$

$AB=x^4+6x^3+4x^2-6x-5$
$\quad=(x+1)^2(x-1)(x+5)$

$\therefore\ G=x+1$

따라서, 두 이차식은 $(x+1)(x-1)=x^2-1$, $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$ 이다.

17. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　② $2^{32}+1$　③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned} P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ &= \quad \vdots \\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\ &= 2^{32}-1 \end{aligned}$$

18. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a-b+c$ 의 값은?

$$x^2-2x+4=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$$

① 8 ② 7 ③ 3 ④ 0 ⑤ −3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.
$x=0$ 을 대입하면
$4=2a \quad \therefore\ a=2$
$x=1$ 을 대입하면
$3=-b \quad \therefore\ b=-3$
$x=2$ 을 대입하면
$4=2c \quad \therefore\ c=2$
$\therefore\ a-b+c=2-(-3)+2=7$

19. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠,㉡
④ ㉠,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0\cdots$①
$f(-1)-g(-1)=2\cdots$②
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
$\therefore$ ㉠, ㉡

20. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

21. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$ 라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998 \times 9999 + 1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$= a+1 = 10000$$

22. 두 다항식 x^2+ax-2, x^2-5x+b의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

각 식에 $x=2$을 대입하면 0이 된다.

i) x^2+ax-2에 $x=2$를 대입하면

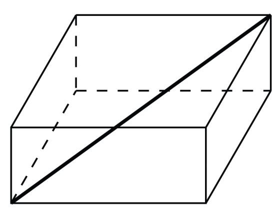
$4+2a-2=0 \therefore \ a=-1$

ii) x^2-5x+b에 $x=2$를 대입하면

$4-10+b=0 \therefore \ b=6$

$\therefore \ a+b=-1+6=5$

23. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c$는양수$)$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots$①
①에 각각 대입하면
$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$
$a^3+b^3+c^3=23$

24. x^8 을 $x+\frac{1}{2}$ 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$ ④ $-\frac{1}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{32}$

해설

$x^8 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면 $R=\frac{1}{2^8}$

$x^8 = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$

$x^8-\frac{1}{2^8} = \left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$

$\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=Q(x)$

$\therefore Q\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{16}$

25. 2003^{10} 를 2002 와 2004 로 나눈 나머지가 각각 a, b 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

2002를 x라 하면, $2003^{10}=(x+1)^{10}$
$(x+1)^{10}=xQ(x)+a$
$(x+1)^{10}=(x+2)Q(x)+b$
나머지 정리에 의해
$x=0$, $x=-2$를 각각 대입하면,
$a=1$, $b=1$
$\therefore a-b=0$