1. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로
$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$
$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$
이므로 $a=4,\ b=1$
$\therefore\ a+b=5$

2. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는
$(a-b+16)x+4b-8$
$(a-b+16)x+4b-8=3x+4 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로,
$a-b+16=3,\ 4b-8=4$
$\therefore\ a=-10,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

3. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

(좌 변) $= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

4. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 2

▷ 정답: -2

해설

ⅰ) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ⅱ) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$이다.

5. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

▷ 정답: −1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

6. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=4\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\}$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$

7. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$

$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-4$

8. $N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 6 개 ② 12 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 64 개

해설

$N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$

$= (69+1)^3 = (2 \cdot 5 \cdot 7)^3$

따라서 N 의 양의 약수는 개수는 $4^3 = 64$

9. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1　　② 1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 2

해설

복소수 z를 $a + bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$이면 $z = 0 + 0i = 0$이므로
$z \neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x = -1$

10. $z=\dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ 의 값을 구하여라.($i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$z=\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

$z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}=(-i)^{100}+\dfrac{1}{(-i)^{100}}=1+1=2$

11. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha + i)(\beta + i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$　　② $-i$　　③ i

④ $1+i$　　⑤ $\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

해설

$$\begin{aligned}(2+i) \circledcirc z &= \{(2+i)+i\}(z+i) \\ &= (2+2i)(z+i) = 1\end{aligned}$$

$z + i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2+2i} - i \\ &= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i \\ &= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i\end{aligned}$$

12. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 4)$ 이다.

$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$

$a = 4,\ b = 8$

$\therefore a + b = 12$

13. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$　② $\alpha = \beta^2$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = -1$　④ $\alpha\beta = -1$

⑤ $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$에서 $x^3 - 1 = 0$

$\rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x - 1 = 0,$ 또는 $x^2 + x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore\ \alpha\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
$\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$의 값을 구해도 된다.

14. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

15. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

16. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$가 x에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ -2　　④ 2　　⑤ 0

해설

양변에 $x = p$를 대입하면
$p^3 - p^2 + 2 = 0$
$(p+1)(p^2-2p+2) = 0 \therefore\ p = -1$
따라서 주어진 식은
$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $2 = a+b+c$
$\therefore\ a+b+c+p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
$\therefore\ (x+1)(x^2-2x+2)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
양변을 비교하면, $x+1 = x-p$,
$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
$\therefore\ p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
$\qquad\qquad\quad = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$
$\therefore\ a = 1,\ 2a+b = -2,\ a+b+c = 2$
$\therefore\ b = -4,\ c = 5$
따라서 $a = 1,\ b = -4,\ c = 5,\ p = -1$
$\therefore\ a+b+c+p = 1$

17. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$ 의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$
$=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2$
$=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)$
$=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=-(b+c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b+c)(c-a)$

18. $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, x^4-3x^3+3x-2 의 값은?

① $2+\sqrt{3}i$ ② $2-\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$
④ $-3+\sqrt{3}i$ ⑤ $3-\sqrt{3}i$

해설

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $2x=1+\sqrt{3}i$, $2x-1=\sqrt{3}i$
$4x^2-4x+1=-3$
$4x^2-4x+4=0$
$x^2-x+1=0$
x^4-3x^3+3x-2 를 x^2-x+1 로 나누면
x^4-3x^3+3x-2
$=(x^2-x+1)(x^2-2x-3)+2x+1$
$=0+2x+1$
$=2\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1$
$=2+\sqrt{3}i$

19. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

㉠ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

㉡ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

20. 자연수 n에 대하여 이차방정식 $n(n+1)x^2-x+2006=0$의 두 근을 α_n, β_n이라할 때, $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2006})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{2006})$의 값은?

① $\frac{2004}{2006}$　② $\frac{2005}{2006}$　③ $\frac{2006}{2007}$　④ $\frac{2007}{2008}$　⑤ $\frac{2007}{2009}$

해설

$n(n+1)x^2-x+2006=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로

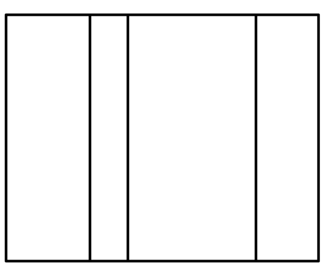
$\alpha_n+\beta_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

준식$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{2006}+\beta_{2006})$

$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007})$

$=1-\frac{1}{2007}=\frac{2006}{2007}$

21. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}(700-5x)\cdot x = -\frac{5}{2}x^2 + 350x = -\frac{5}{2}(x^2 - 140x + 70^2 - 70^2) = -\frac{5}{2}(x-70)^2 + 12250$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

22. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$이 단 한 개의 공통근을 가진다. $-1 \le a \le 0$일 때 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots$①

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots$②

①－② : $(a-b)(\alpha-1) = 0$에서

$a \ne b$이므로 $\alpha = 1$

$1 + a + b = 0$에서 $b = -a-1$

$a^2 + b^2 = a^2 + (-a-1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$

$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$-1 \le a \le 0$이므로 $M = 1$, $m = \frac{1}{2}$

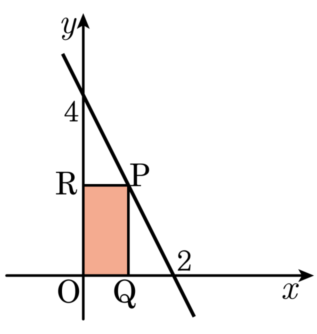
23. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형
② 이등변삼각형
③ 정삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$
$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$
$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$a,\ b,\ c$는 실수이므로
$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$
$\therefore\ a=b=c$
따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

24. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

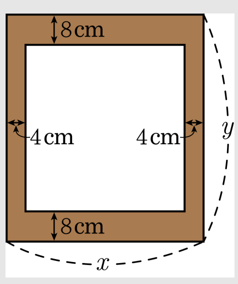
$$\begin{aligned} y &= x(-2x+4)(0 < x < 2) \\ &= -2x^2 + 4x \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -2(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

$x = 1$ 일 때 최댓값 2

25. 직사각형 모양의 액자를 만드는데 가장자리의 위아래에는 8 cm , 양옆에는 4 cm 의 여백을 두고 가운데 부분에 사진을 넣으려 한다. 액자 둘레의 길이가 224 cm 일 때, 사진의 넓이를 최대로 하는 액자의 짧은 변의 길이를 구하면? (단, 단위는 cm)

① 48 cm ② 50 cm ③ 52 cm ④ 54 cm ⑤ 60 cm

해설



액자의 폭(가로)과 아래위(세로)의 길이를 각각 x, y 라 하면 주어진 조건에 의하여

$2(x+y)=224, \quad \therefore \; x+y=112$

사진의 넓이 S 는

$S=(x-8)(y-16)=(x-8)(112-x-16)$ 즉, 사진의 넓이는

$=(x-8)(96-x)$

$=-x^2+104x-768$

$=-(x-52)^2+1936$

$x=52, \; y=60$ 일 때

최대가 된다.

따라서 구하는 액자의 짧은 변의 길이는 52 이다.

해설

액자의 폭(가로)과 아래위(세로)의 길이를

각각 x, y 라 하면

사진의 넓이는 $S=(x-8)(y-16)$ 이다.

한편, $2(x+y)=224$ 이므로 $x+y=112$ 이고

$(x-8)+(y-16)=x+y-24=88$

$x-8>0, y-16>0$ 이므로

산술평균과 기하평균 관계에 의하여

$$\frac{(x-8)+(y-16)}{2} \geq \sqrt{(x-8)(y-16)}$$

$\therefore \; S=(x-8)(y-16) \leq 44^2=1936$

따라서 $x-8=y-16=44$ 일 때

S 의 값이 최대이다.

$\therefore \; x=52, \; y=60$