

1. 다음 중 옳은 것은?

- ① $0 \in \{0, 1\}$
- ② $3 \in \{2, 5\}$
- ③ $5 \notin \{1, 3, 5, 7\}$
- ④ $\{1\} \in \{1, 5, 9\}$
- ⑤ $12 \in \{1, 2, 9, 18\}$

해설

- ② $3 \notin \{2, 5\}$
- ③ $5 \in \{1, 3, 5, 7\}$
- ④ $\{1\} \subset \{1, 5, 9\}$
- ⑤ $12 \notin \{1, 2, 9, 18\}$

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, a^2 + 2, a^2 + a + 6\}$ 일 때, $A = B$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이고 $A = B$ 이므로

$a^2 + 2 = 3$ 또는 $a^2 + 2 = 6$

(i) $a^2 + 2 = 3$ 일 때 $a^2 = 1$

$\therefore a = \pm 1$

$a = 1$ 이면 $a^2 + a + 6 = 8$ 이므로

$A \neq B$

$a = -1$ 이면 $a^2 + a + 6 = 6$ 이므로

$A = B$

(ii) $a^2 + 2 = 6$ 일 때 $a^2 = 4$

$\therefore a = \pm 2$

$a = 2$ 이면 $a^2 + a + 6 = 12$ 이므로

$A \neq B$

$a = -2$ 이면 $a^2 + a + 6 = 8$ 이므로

$A \neq B$

따라서 $A = B$ 를 만족시키는 $a = -1$ 이다.

4. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8\text{의 약수}\}$, $B = \{5, 6, 7, 9, 11\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(C \cap A) \cup B$ 의 원소 중에서 가장 큰 원소를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 가 된다.

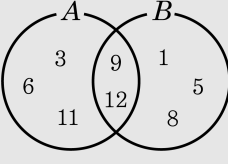
먼저 C 와 A 의 교집합을 구해보면 $C \cap A = \{1, 2, 4\}$ 이고 B 와 합집합을 구하면

$(C \cap A) \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ 이 된다. 가장 큰 원소는 11이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{1, 5, 8, 9, 12\}$, $A \cap B = \{9, 12\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$ 일 때, 집합 A 는?
- ① $\{2, 4, 6, 7, 8\}$ ② $\{2, 3, 6, 8\}$
③ $\{3, 6, 8, 9, 12\}$ ④ $\{3, 6, 9, 12\}$
⑤ $\{3, 6, 9, 11, 12\}$

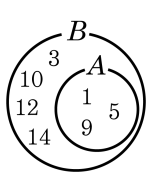
해설

벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



그러므로 집합 $A = \{3, 6, 9, 11, 12\}$ 이다.

6. 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?
(답 2 개)



- ① $A = \{1, 5, 9\}$

② $B = \{3, 10, 12, 14\}$
- ③ $A \subset B$

④ $A \cap B = A$
- ⑤ $A \cup B = A$

해설

② 집합 B 가 집합 A 를 포함하므로 $B = \{1, 3, 5, 9, 10, 12, 14\}$ 가 된다.

⑤ $A \cup B = B$ 이므로 옳지 않다.

7. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{보다 크고 } 16 \text{보다 작은 짝수}\}$ 에 대한 설명 중 옳은 것은?
- ① $\emptyset$ 는 집합 A 의 부분집합이다.
 - ② $\{10, 14, 16\}$ 은 집합 A 의 부분집합이다.
 - ③ 원소가 하나뿐인 집합 A 의 부분집합은 1개다.
 - ④ 원소가 2개인 집합 A 의 부분집합은 2개다.
 - ⑤ 원소가 3개인 집합 A 의 부분집합은 3개다.

해설

$A = \{10, 12, 14\}$

- ③ 원소가 하나뿐인 집합 A 의 부분집합은 3개이다.
- ④ 원소가 2개인 집합 A 의 부분집합은 3개이다.
- ⑤ 원소가 3개인 집합 A 의 부분집합은 1개이다.

8. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) = a$, 집합 A 의 부분집합의 개수를 b 개라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = \{1, 2, 5, 10\}$ 이므로 $a = n(A) = 4$ 이다.

$b = (A \text{의 부분집합의 개수}) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\therefore a + b = 4 + 16 = 20$

9. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \cup B = B$ 인 조건을 만족하는 자연수 k 의 값으로 적당하지 않은 것은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$A \cup B = B$ 를 만족하려면 $A \subset B$ 인 관계가 성립하여야 하므로 집합 B 는 집합 A 의 원소인 8의 배수를 모두 포함하여야 한다. 따라서 k 가 8의 약수일 때다. 즉 6의 배수는 8의 배수 전부를 포함하지 않는다.

10. 명제 ‘ $p(x)$ 이면 $q(x)$ 가 아니다’가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $Q \subset P$

③ $P \subset Q^c$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $P \cup Q = P$

해설

‘ q 가 아니다’를 만족시키는 집합은 Q^c
따라서 ‘ p 이면 q 가 아니다’가 참이면 $P \subset Q^c$

11. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $q \rightarrow p$

② $r \rightarrow \sim p$

③ $\sim p \rightarrow r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow r$

해설

$$p \rightarrow q(T), \sim q \rightarrow \sim p(T), r \rightarrow \sim q(T), q \rightarrow \sim r(T)$$

$$\therefore p \rightarrow q \rightarrow \sim r$$

$$\text{따라서 } p \rightarrow \sim r(T), r \rightarrow \sim p(T)$$

12. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
빈 칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

주어진 명제의 (가)을(를) 구하여 보면
(가) : ' n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'
이 때, n 이 홀수이므로
 $n = (나)(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, $n^2 = (나)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다)이므로 n^2 은 홀수이다.
∴ (가)가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

- ① 역, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ② 이, $2k - 1, 홀수$
- ③ 대우, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ④ 대우, $2k - 1, 0$ 또는 홀수
- ⑤ 역, $2k + 1, 0$ 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로
∴ (가) : 대우
 n 이 홀수이므로 ∴ (나) : $2k + 1$
 $2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times (정수)$ 의 형태이므로
∴ (다) : 0 또는 짝수

13. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라. (단, a, b 는 실수)

(i) $p : a, b$ 는 유리수, $q : a + b, ab$ 는 유리수
(ii) $p : x$ 는 3의 배수, $q : x$ 는 6의 배수

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

15. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a > 20, b > 25$

② $a \geq 20, b > 25$

③ $a > 20, b = 25$

④ $a = 20, b > 25$

⑤ $a = 20, b < 25$

해설

$$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$$

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$(20 - a)y + 25 - b < 0$$

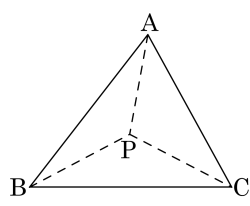
이것이 임의의 실수 y 에 대하여 항상 성립할 조건은

$$20 - a = 0, 25 - b < 0$$

$$\therefore a = 20, b > 25$$

16. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
 ④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



해설

$$S_1 + S_2 + S_3 = a$$

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

17. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 자연수의 개수는 모두 몇 개인가?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$A \subset B$ 이면 $\square$ 는 8의 약수이어야 한다. 따라서 $\square$ 는 1, 2, 4, 8의 4개이다.

18. 두 집합 $A = \{a, b, 7\}$, $B = \{a + 1, 4, 6\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $a \times b$ 의 값은?

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A, B 의 모든 원소가 같아야 하므로 $a + 1 = 7$ 이다.

즉 $a = 6$ 이고 집합 $B = \{7, 4, 6\}$ 이므로 $b = 4$ 이다. 따라서 $a \times b = 6 \times 4 = 24$ 이다.

19. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 1\text{을 제외한 } 4\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 짝수}\}$, $X = \{2, 4, 6, \dots, n\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 일 때, n 의 최댓값과 최솟값의 차는?

- ① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

해설

$A \subset X \subset B$ 이므로, $A = X$ 일 때, n 이 최솟값을 갖고, $X = B$ 일 때, n 이 최댓값을 갖는다.

따라서 $A = \{2, 4\} = X$, $n = 4$ (최솟값)

$B = \{2, 4, 6, \dots, 20\} = X$, $n = 20$ (최댓값)

$\therefore 20 - 4 = 16$

20. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5\text{이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $X \cap A = X$ 와 $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8 개

해설

$$X \cap A = X^{\circ} \mid \text{므로 } X \subset A$$
$$X \cup (A \cap B) = X \circledast \text{므로 } (A \cap B) \subset X$$
$$A \cap B = \{1, 5\}$$
$$\{1, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 5를 반드시 포함하는 집합이다.

$$\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

21. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A - B = \emptyset, B - A = \emptyset$ 이고, 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A - B = \emptyset, B - A = \emptyset$,
 $\rightarrow A = B$,
 $\rightarrow A \cap B = A = B$,
 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 이므로,
집합 A 의 모든 원소의 합은 10

22. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 20\text{이하의 소수}\}$ 에 대하여 $A = \{2, 7, 11\}$, $B = \{3, 7, 11, 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $A \cap B = \{7, 11\}$
- ② $A \cap B^c = \{2\}$
- ③ $A^c \cap B = \{3, 17\}$
- ④ $A^c \cup B^c = \{2, 3, 9, 13, 17, 19\}$
- ⑤ $A^c \cap B^c = \{5, 13, 19\}$

해설

$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$,
 $A = \{2, 7, 11\}$, $B = \{3, 7, 11, 17\}$
② $A \cap B^c = A - B = \{2\}$
③ $A^c \cap B = B - A = \{3, 17\}$
④ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$
⑤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 13, 19\}$

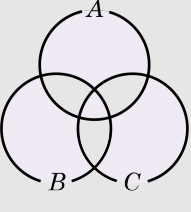
23. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 $\odot$ 을 $X \odot Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 로 정의하자. 1에서 30까지의 자연수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $(A \odot B) \odot C$ 의 원소의 개수는?

- ① 11개 ② 12개 ③ 13개 ④ 14개 ⑤ 15개

해설

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) &= (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c \\ &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ &= (X - Y) \cup (Y - X) \end{aligned}$$

이 정의로부터 $(A \odot B) \odot C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이때, $A \cap B$ 는 6의 배수의 집합,
 $B \cap C$ 는 15의 배수의 집합,
 $C \cap A$ 는 10의 배수의 집합,
 $A \cap B \cap C$ 는 30의 배수의 집합이므로
 $n(A) = 15, n(B) = 10, n(C) = 6,$
 $n(A \cap B) = 5, n(B \cap C) = 2, n(C \cap A) = 3,$
 $n(A \cap B \cap C) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore n \{ (A \odot B) \odot C \} &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - 2 \{ n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \} \\ &\quad + 4 \cdot n(A \cap B \cap C) \\ &= 15 + 10 + 6 - 2(5 + 2 + 3) + 4 \\ &= 15 \end{aligned}$$

24. 두 조건 $p : a - 4 < x \leq a + 5$, $q : |x| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p , q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 $q : -1 \leq x \leq 1$ 에서 $a + 5 \geq 1$, $a - 4 < -1$ 따라서 $a \geq -4$, $a < 3$ 이다.
즉, $-4 \leq a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

25. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 다음 두 조건을 동시에 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

(가) 집합 X 는 적어도 하나의 홀수를 포함한다.
(나) $n(X) \leq 5$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 112 개

해설

전체집합 U 의 부분집합의 개수는
 $2^7 = 128$ (개)
이 중 홀수를 포함하지 않는 집합의 개수는
 $2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)
따라서 (가)를 만족하는 집합 X 의 개수는
 $128 - 8 = 120$ (개)
이때, $n(X) = 6$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \cdots$,
 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 7개로 이들은 모두 조건 (가)를 만족한다.
또 $n(X) = 7$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 1개로 이것도 역시
조건 (가)를 만족한다.
따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $120 - (7 + 1) = 112$ (개)

26. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 서로 같은 집합을 고르면?

㉠ A	㉡ $B - A$	㉢ $A \cap B$
㉣ $\emptyset$	㉤ $A - B^c$	㉥ $A^c \cup B^c$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

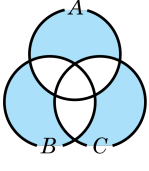
$A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$,
 $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = A$
따라서 ㉠, ㉢, ㉤이 A 로 같다.

27. 집합 $A = \{1, 2 \times a, a + 2\}$, $B = \{a, 2 \times a - 2, 2 \times a - 7\}$ 이고 $A - B = \{8\}$ 일 때, $C = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $(A \cap C) \cup (B - C)$ 는?
- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{1, 4, 6\}$
④ $\{2, 5, 6\}$ ⑤ $\{2, 6, 8\}$

해설

$A - B = \{8\}$ 이므로
(1) $2 \times a = 8$ 일 때, $a = 4$ 이다.
이 때 $A = \{1, 6, 8\}$, $B = \{1, 4, 6\}$ 이고 $C = \{1, 2, 3\}$ 이므로
 $(A \cap C) \cup (B - C) = \{1\} \cup \{4, 6\} = \{1, 4, 6\}$ 이다.
(2) $a + 2 = 8$ 일 때, $a = 6$ 이다.
이 때 $A = \{1, 8, 12\}$, $B = \{5, 6, 10\}$ 이므로 $A - B = \{1, 8, 14\} \neq \{8\}$
이므로 조건에 맞지 않다.
따라서 (1), (2) 에서 $(A \cap C) \cup (B - C) = \{1, 4, 6\}$ 이다.

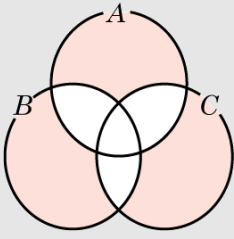
28. 1에서 100까지의 자연수 중에서 $A = \{x|x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 5\text{의 배수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에 색칠된 부분에 속하는 원소의 개수는?



- ① 48 개 ② 67 개 ③ 75 개
 ④ 77 개 ⑤ 85 개

해설

색칠한 부분에 속하는 원소의 개수는
 $n(A) + n(B) + n(C) - 2 \times n(A \cap B) - 2 \times n(B \cap C) - 2 \times n(C \cap A) + 3 \times n(A \cap B \cap C)$
 이다.



$n(A) = 50, n(B) = 33, n(C) = 20$, $A \cap B = \{x|x \text{는 } 6\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(A \cap B) = 16$
 $B \cap C = \{x|x \text{는 } 15\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(B \cap C) = 6$, $C \cap A = \{x|x \text{는 } 10\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(C \cap A) = 10$
 $A \cap B \cap C = \{x|x \text{는 } 30\text{의 배수}\}$ 이므로 $n(A \cap B \cap C) = 3$
 따라서 $50 + 33 + 20 - 2 \times 16 - 2 \times 6 - 2 \times 10 + 3 \times 3 = 48$ 이다.

29. 집합 $A_k = \{x|x \text{는 } k \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A_2 \cap A_4 \cap A_{16} = A_{16}$

② $A_3 \cup A_6 \cup A_9 = A_3$

③ $A_4 \cup A_{12} = A_4$

④ $A_6 \cup A_{12} = A_6$

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_9$

해설

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_{18}$

30. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 과 $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$ 의 근을 α, β , $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을 γ, δ 라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$ 의 최솟값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$$x^2 - ax + b = 0 \text{에서 } \alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$$
$$x^2 - bx + a = 0 \text{에서 } \gamma + \delta = b, \gamma\delta = a$$
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$
$$a > 0, b > 0 \text{이므로 } \frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$$
$$\text{따라서 } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$
$$\therefore \text{최솟값} = 2$$