

1. 연립부등식 $\begin{cases} 4x - 2 < 10 \\ 2x - 5 > 1 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

$$\begin{aligned} 4x - 2 &< 10 \\ 4x &< 12 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 5 &> 1 \\ 2x &> 6 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

따라서 동시에 만족하는 정수 x 는 없다.

2. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양이 되기 위한 a 값의 범위는?

① $a < 7$

② $a > 9$

③ $6 < a \leq 9$

④ $6 \leq a < 9$

⑤ $7 < a < 9$

해설

$x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19) > 0$ 이므로

이 부등식의 $D < 0$ 이다.

$$D = (a-5)^2 - 2(3a-19) = a^2 - 16a + 63 < 0$$

$$\therefore 7 < a < 9$$

3. 연립부등식 $3(2x-1) \leq 2(x+6)$, $2(x+6) \leq 5(x+1)$ 에 대하여 해를 구하면?

- ① $\frac{7}{3} < x < \frac{15}{4}$ ② $\frac{7}{3} \leq x < \frac{15}{4}$ ③ $2 \leq x < 5$
④ $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{7}{3} < x < 5$

해설

$$3(2x-1) \leq 2(x+6) \Rightarrow 6x-3 \leq 2x+12$$

$$\Rightarrow 4x \leq 15 \Rightarrow x \leq \frac{15}{4}$$

$$2(x+6) \leq 5(x+1) \Rightarrow 2x+12 \leq 5x+5$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{15}{4}$$

4. $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$

$1 \leq x \leq 2$ 에서

이 부등식이 항상 성립해야 하므로

방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이 1보다 작고, 다른 한 근은 2보다 커야 한다.

$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면

$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $a < 1$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해는 몇 개인가?

- ① 7 개 ② 6 개 ③ 5 개 ④ 4 개 ⑤ 3 개

해설

$x^2 - x - 6 \leq 0$
 $\Rightarrow (x - 3)(x + 2) \leq 0$
 $\Rightarrow -2 \leq x \leq 3 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $x^2 - 5x + 4 > 0$
 $\Rightarrow (x - 1)(x - 4) > 0$
 $\Rightarrow x < 1 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots \quad \textcircled{2}$
①, ②의 공통범위는 : $-2 \leq x < 1$
 $\therefore$ 정수의 해 : $-2, -1, 0$

6. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \\ 3x - 1 \geq 5x - 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 가 3개일 때, 상수

a 의 값의 범위는?

- ① $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$ ③ $0 \leq a < 1$
 ④ $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$

해설

$$\frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \text{ 에서 } x \geq a - \frac{1}{2}$$

$$3x - 1 \geq 5x - 7 \text{ 에서 } x \leq 3$$

$$\therefore a - \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

연립부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이려면

$$0 < a - \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x - 3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이다. $-ax + b \geq 0$

을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$5x < a + 11, x < \frac{a + 11}{5}$$

$$x - b < 3x - 9, 9 - b < 2x, \frac{9 - b}{2} < x$$

$$\frac{a + 11}{5} = 3 \quad \therefore a = 4$$

$$\frac{9 - b}{2} = 1 \quad \therefore b = 7$$

$a = 4, b = 7$ 을 $-ax + b \geq 0$ 에 대입하여 정리하면

$$-4x + 7 \geq 0$$

$x \leq \frac{7}{4}$ 이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1이다.

8. x 보다 크지 않은 최대의 정수와 x 보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x 는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

② $\{x|2 \leq x \leq 3\}$

③ $\{x|2 \leq x < 3\}$

④ $\{x|2 < x \leq 3\}$

⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$ 를 x 보다 크지 않은 최대의 정수,
 $\langle x \rangle$ 를 x 보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.

$x = n$ (n 은 정수)일 때,

$$[x] = n, \langle x \rangle = n \text{이므로 } n + n = 5, n = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ 적당하지 않다.

$n < x < n + 1$ (n 은 정수)일 때,

$$[x] = n, \langle x \rangle = n + 1 \text{이므로 } n + n + 1 = 5$$

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore 2 < x < 3$$

9. 6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 중 5 개의 무게는 같고, 나머지 1 개의 무게는 다르다. A, B 의 무게의 합은 C, D 의 무게의 합보다 작고, B, C 의 무게의 합은 E, F 의 무게의 합보다 작을 때, 무게가 다른 구슬을 찾아라.

▶ 답 :

▷ 정답 : B

해설

6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 의 무게를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면

$$a + b < c + d \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b + c < e + f \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠ 에서 A, B, C, D 구슬 중 무게가 다른 것이 있으므로 E, F 의 구슬의 무게는 같다. 마찬가지로 방법으로 ㉡ 에서 A, D 구슬의 무게는 같다.

따라서 ㉠ 에서 $b < c$ 이므로 ㉡ 에서 $b + c < e + f$ 인 것은 구슬 B 의 무게 때문이다.

즉, B 구슬의 무게가 다른 구슬들과 다르다.

10. x, y 가 실수이고 $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$ 을 만족할 때, $\frac{y}{x}$ 의 최대값 M , 최소값 m 의 합 $M + m$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$\frac{y}{x} = k$ 라 하자. $y = kx$ 이므로
 $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$ 에서
 $(k - 2k + 1)x^2 - (2 + 2k)x + 4 = 0$
 x, y 는 실수이므로, 판별식은 0보다 크거나 같다.
 $\therefore D' = (k + 1)^2 - 4(k^2 - 2k + 1) \geq 0$
 $3k^2 + 10k - 3 \geq 0$
 $3k^2 - 10k + 3 \leq 0$
 $(k - 3)(3k - 1) \leq 0$
 $\frac{1}{3} \leq k \leq 3$
 $\therefore m + M = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$