

1. $a^2 - b^2 = 2$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은?

- ① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= A, \quad (a-b)^n = B \\(\text{준식}) &= (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2) \\&= 4AB \\&= 4\{(a+b)(a-b)\}^n \\&= 4 \times 2^n \\&= 2^{n+2}\end{aligned}$$

2. $a(a+1)=1$ 일 때, $\frac{a^4-a^2}{a^6-1}$ 의 값은?

① 1

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$a(a+1)=1 \text{ 에서}$$

$$a^2=-a+1$$

$$a^4=(-a+1)^2=a^2-2a+1$$

$$=(-a+1)-2a+1=-3a+2$$

$$a^6=a^4 \times a^2=(-3a+2)(-a+1)$$

$$=3a^2-5a+2=3(-a+1)-5a+2$$

$$=-8a+5$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^4-a^2}{a^6-1} &= \frac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1} \\ &= \frac{-2a+1}{-8a+4} = \frac{-2a+1}{4(-2a+1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. 모든 실수 x 에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$, $P(0) = 0$ 을 만족한다.
2차 이하의 다항식 $P(x)$ 의 계수의 합은?
- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면
 $P(0) = 0$ 에서 $c = 0 \therefore P(x) = ax^2 + bx$
 $P(x^2 + 1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 이므로
 $a(x^2 + 1)^2 + b(x^2 + 1) = (ax^2 + bx)^2 + 1$
 $ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = a^2, 2ab = 0, 2a + b = b^2, a + b = 1$
 $a^2 = a$ 와 $a + b = 1$ 에서
 $(a, b) = (0, 1), (1, 0)$ 이 되는데
이 중 $(1, 0)$ 은 $2a + b = b^2$ 을 만족하지 않으므로 $(a, b) = (0, 1)$
즉, $P(x) = x$ 뿐이다.
 $\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2 + 1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면
 $P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$ 이 된다.
 $P(1) = 1$ ($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x = 1$ 대입)

4. x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$,
 $Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5, Q(x) = (x+3)Q_1(x) + 3$ 이므로
 $P(x) = (x-2)((x+3)Q_1(x) + 3) + 5$
 $= (x-2)(x+3)Q_1(x) + 3x - 1$
 $\therefore P(-3) = -9 - 1 = -10$
따라서 $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는
 $-3P(-3) = -3 \times (-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서 양변에 x 를 곱하면
 $xP(x) = x(x-2)Q(x) + 5x \cdots \textcircled{1}$
나머지정리에 의해 $xP(x)$ 를 $x+3$ 로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$ 이다.
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $-3P(-3) = -3 \cdot (-5)Q(-3) - 15$
 $Q(-3) = 3$ 을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

5. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$ 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 10000\end{aligned}$$

6. $f(2) = -15$, $g(-2) = 5$ 인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 의 곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$, 최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 일 때, $f(-2) + g(2)$ 의 값은?

① 8

② 18

③ 28

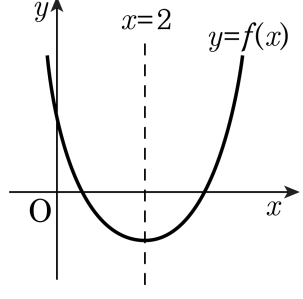
④ 38

⑤ 48

해설

곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$ 이고,
최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 이므로
두 이차식은 $(x+3)(x-5)$, $(x+3)(x+7)$
 $f(2) = -15$ 이므로 $f(x) = (x+3)(x-5)$
 $g(-2) = 5$ 이므로 $g(x) = (x+3)(x+7)$
 $\therefore f(-2) + g(2) = (-2+3)(-2-5) + (2+3)(2+7)$
 $= (-7) + 45 = 38$

7. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

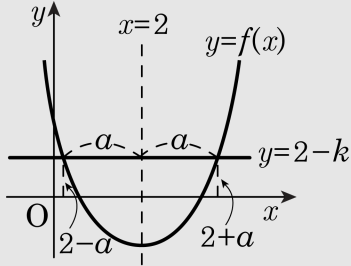
해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은

$$t = 2 - k \text{ 또는 } t = 2 + k$$

($0 < k < 2$)로 놓을 수 있다.

$$\therefore f(x) = 2 - k \text{ 또는 } f(x) = 2 + k$$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = 2 - a \text{ 또는 } x = 2 + a$$

(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도

마찬가지로 생각하면 $x = 2 - b$ 또는 $x = 2 + b$

따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은

$$(2 - a) + (2 + a) + (2 - b) + (2 + b) = 8$$

8. 함수 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

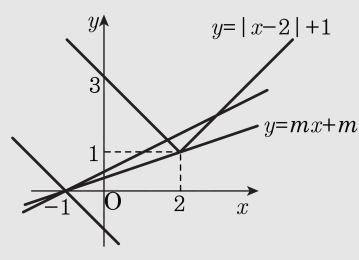
해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x - 2| = x - 2$ 이므로

$$y = x - 2 + 1 = x - 1$$

$x < 2$ 일 때, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = -x + 2 + 1 = -x + 3$

따라서, $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx + m = m(x + 1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx + m$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m + m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx + m$ 이 직선 $y = -x + 3$ 과 평행할 때, $m = -1$

따라서, 직선 $y = mx + m$ 이 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프와 만나려면

가울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$

이다.

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) + 1 = -\frac{3}{2}$$

10. $x = 2$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x - p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}y &= a(x - 2)^2 - 1 \\&= a(x^2 - 4x + 4) - 1 \\&= ax^2 + 4ax + 4a - 1\end{aligned}$$

$$4a - 1 = 3$$

$$a = 1$$

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

$$apq = 1 \times 2 \times (-1) = -2$$

11. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = -4$$

$\beta + \gamma = -2 - \alpha, \gamma + \alpha = -2 - \beta, \alpha + \beta = -2 - \gamma$ 를 이용하면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{-2 - \alpha}{\alpha} + \frac{-2 - \beta}{\beta} + \frac{-2 - \gamma}{\gamma}$$

$$= -2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - 3$$

$$= -2 \left(\frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \right) - 3 = -\frac{3}{2}$$

12. 두 부등식 $0.7 - x \leq -2 - 0.1x$, $\frac{2+x}{3} \geq x + a$ 의 공통 부분이 없을 때, a 의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$0.7 - x \leq -2 - 0.1x \quad 7 - 10x \leq -20 - x - 9x \leq -27, \quad x \geq 3$$

$$\frac{2+x}{3} \geq x + a \quad 2 + x \geq 3x + 3a - 2x \geq 3a - 2, \quad x \leq 1 - \frac{3}{2}a$$

공통 부분이 없으므로 $1 - \frac{3}{2}a < 3$,

$$-\frac{3}{2}a < 2$$

$$\therefore a > -\frac{4}{3}$$

따라서 가장 작은 정수 a 의 값은 -1이다.

13. 연립부등식

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x + 1) + 1 < 4x - 1 \\ -a < x < a \end{cases} \quad \text{의 해가 없을 때, 양수 } a \text{의 값의}$$

범위는?

- ① $0 < a < 2$ ② $0 < a \leq 2$ ③ $0 < a < 3$
 ④ $0 < a \leq 3$ ⑤ $2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x + 1) + 1 < 4x - 1 \cdots \textcircled{㉠} \\ -a < x < a \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

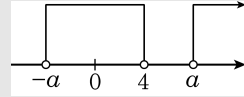
㉠ : $12 - x < 2(x + 1) + 1$ 의 해는 $x > 3$

$2(x + 1) + 1 < 4x - 1$ 의 해는 $x > 2$

$\therefore x > 3$

㉡ : $-a < x < a$

연립부등식의 해가 없으려면 다음 그림과 같아야 하므로 양수 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 3$ 이다.



14. 일의 자리 숫자가 십의 자리 숫자보다 5 만큼 큰 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수가 27 보다 크고 38 이하라고 한다. 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 38

해설

십의 자리 숫자를 a 라 하면 일의 자리 숫자는 $a + 5$ 이다.
즉 두 자리 자연수는 $10a + (a + 5) = 11a + 5$ 이다.

$$27 < 11a + 5 \leq 38$$

$$22 < 11a \leq 33$$

$$2 < a \leq 3$$

a 는 자연수이므로 3 이다. 따라서 두 자리 자연수는 38 이다.

15. 1 개에 400 원 하는 껌과 600 원 하는 껌을 합하여 10 개를 사는데 그 값이 5300 원 이상 5500 원 이하가 되게 하려면 600 원짜리 껌을 몇 개 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

600 원 하는 껌의 개수를 x , 400 원 하는 껌의 개수를 $10 - x$
 $5300 \leq 600x + 400(10 - x) \leq 5500$
 $53 \leq 6x + 40 - 4x \leq 55$
 $13 \leq 2x \leq 15$, $\frac{13}{2} \leq x \leq \frac{15}{2}$
 $6.5 \leq x \leq 7.5$
 $\therefore x = 7$

16. 사료 A, B 의 1g 당 영양소 C, D 의 함유량과 100g 당 단가는 다음과 같다.

	C(mg)	D(mg)	단가(원)
A	21	15	500
B	16	19	600

하루에 두 사료를 모두 합해 0.3kg 먹는 어떤 동물의 1 일 영양소 섭취량이 C 는 60g 이하, D 는 50g 이하가 되게 하려고 한다. 구입한 사료의 가격이 가장 쌀 때, 사료 B 의 무게를 구하여라.

▶ 100

▶ 정답 : 60 g

해설

사료 A 의 무게를 x g 이라 하면 사료 B 의 무게는 $(300 - x)$ g 이다.

C 가 60g 이하이므로

$$0.21x + 0.16(300 - x) \leq 60 \dots \textcircled{7}$$

D 가 50g 이하이므로

$$0.15x + 0.19(300 - x) \leq 50 \dots \textcircled{1}$$

$$0.15x + 0.19(300 - x) \leq 0.18(300)$$

㉠ 을 풀면 $x \leq 240$

㉔ 을 풀면 $x \geq 17$

구입한 사료의 가격이 가장 싸려면 A 를 많이 구입해야 하고 B 는 적게 구입해야 한다. 따라서 구하는 사료 B 의 무게는

17. 부등식 $|2x+2| < a+3$ 를 만족하는 실수 x 값이 존재하기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \leq -4$

② $a > -4$

③ $a < -3$

④ $a > -3$

⑤ $a \leq -1$

해설

i) $x \geq -1$ 일 때,

$$2x+2 < a+3, 2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

$x \geq -1, x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ 를 만족하는 x 의 값이 존재하기 위해서는

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} > -1, a > -3$$

ii) $x < -1$ 일 때,

$$-2x-2 < a+3, -2x < a+5$$

$x < -1, x > -\frac{1}{2}a - \frac{5}{2}$ 를 만족하는 x 의 값이 존재하기 위해서는

$$-\frac{1}{2}a - \frac{5}{2} < -1 \quad \therefore a > -3$$

i), ii)에 의하여 $a > -3$

18. $6[x]^2 - 31[x - 1] - 13 < 0$ 을 풀면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \leq x < 3$

② $-2 \leq x < 5$

③ $0 \leq x < 3$

④ $1 \leq x < 5$

⑤ $1 \leq x < 6$

해설

$$n \leq [x] < n + 1 \text{에서}$$

$$n - 1 < [x - 1] < n \text{이므로}$$

$$[x - 1] = [x] - 1$$

$$\therefore 6[x]^2 - 31[x - 1] - 13$$

$$= 6[x]^2 - 31([x] - 1) - 13$$

$$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$$

$$\therefore (2[x] - 9)(3[x] - 2) < 0$$

$$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$$

$$\therefore 1 \leq [x] \leq 4 \text{이므로}$$

$$[x] = 1, 2, 3, 4$$

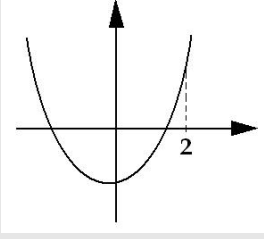
$$\therefore 1 \leq x < 5$$

19. $x > 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$ 을 성립하게 하는 실수 k 의 최댓값은?

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$ 의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2 \dots\dots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$ 에서 $k \leq 1 \dots\dots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$

$\textcircled{\small{\text{㉠}}}$, $\textcircled{\small{\text{㉡}}}$ 에서 $k \leq 1$

k 의 최댓값은 1이다.

20. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $p < x < q$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해를 p, q 를 써서 나타내면? (단, $p > 0$)

① $x > q$ 또는 $x < p$

② $\frac{1}{q} < x < \frac{1}{p}$

③ $x > \frac{1}{p}$

④ $x < \frac{1}{q}$

⑤ $x > \frac{1}{p}$ 또는 $x < \frac{1}{q}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $p < x < q$ 라면

$$(a < 0 \text{ 이므로}) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-p)(x-q) < 0, \quad x - (p+q)x + pq < 0$$

$$p+q = -\frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

$cx^2 + bx + a < 0$ 에서 양변을 a 로 나누면

$$\frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 > 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\Leftrightarrow pqx^2 - (p+q)x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1) > 0$$

$$\therefore x > \frac{1}{p} \text{ 또는 } x < \frac{1}{q}$$

$$\left(\because \frac{1}{p} > \frac{1}{q} \right)$$

21. 이차방정식 $x^2 + (a-b)x + ab = 1$ 이 a 의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b 의 범위를 정하면?

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
 ③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{3}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$
 ⑤ $b \leq -2, b \geq 2$

해설

$$x^2 + (a-b)x + ab - 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$D = (a-b)^2 - 4(ab-1) \geq 0$$

이 식을 a 에 관해서 정리하면, $a^2 - 6ba + b^2 + 4 \geq 0$ 이

부등식이 a 에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \leq 0$

이므로

$$\frac{D'}{4} = (3b)^2 - (b^2 + 4) \leq 0$$

$\therefore 2b^2 - 1 \leq 0$ 에서

$$(\sqrt{2}b + 1)(\sqrt{2}b - 1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

22. 두 부등식 $x^2 + ax + b \geq 0$, $x^2 + cx + d \leq 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 범위가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x = 2$ 라고 한다.

이 때 $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

- ① -6
- ② -5
- ③ -8
- ④ -10
- ⑤ -3

해설

$x^2 + ax + b \geq 0$ 의 해를 $x \leq \alpha$, $x \geq \beta$

$x^2 + cx + d \leq 0$ 의 해를 $\gamma \leq x \leq \delta$ 라고

하면

공통의 해가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x = 2$ 이려면

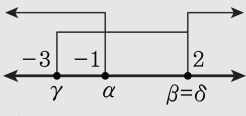
다음 그림에서와 같이 $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$, $\delta = 2$ 이어야

한다.

$\therefore x^2 + ax + b = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$ 이므로 $a = -1$, $b = -2$

$x^2 + cx + d = (x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$ 이므로 $c = 1$, $d = -6$

따라서 $a + b + c + d = -1 + (-2) + 1 + (-6) = -8$



23. $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$$

$$\therefore x = \pm 6$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 6$$

24. 좌표평면 위의 두 점 A(7, 4), B(8, 6) 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x 좌표를 a 라 할 때, $5a$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

A(7, 4)를 $y = x$ 에 대칭이동한 점 C(4, 7)에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소인 점 P는

선분 BC와 직선 $y = x$ 의 교점이다.

$$y = -\frac{1}{4}x + 8 \text{와 } y = x \text{의 교점은 } \left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

$$\therefore 5a = 32$$

25. 직선 $x + y = 1$ 은 두 점, A(-2, 0), B(0, 7)을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① 3 : 2 ② 2 : 3 ③ 1 : 1 ④ 2 : 1 ⑤ 1 : 2

해설

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,

점 P 의 좌표는

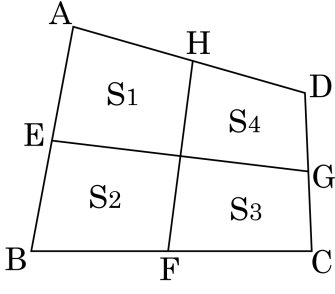
$$\left(\frac{m \cdot 0 + n \cdot (-2)}{m + n}, \frac{m \cdot 7 + n \cdot 0}{m + n} \right) = \left(\frac{-2n}{m + n}, \frac{7m}{m + n} \right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x + y = 1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m + n} + \frac{7m}{m + n} = 1, -2n + 7m = m + n, 2m = n$$

$$\therefore m : n = 1 : 2$$

26. 다음 그림과 같이 내각의 크기가 모두 180° 보다 작은 사각형 ABCD가 있다.



네 변 AB, BC, CD, DA의 중점을 각각 E, F, G, H라 하고, $\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 에 의하여 나누어진 사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 라 할 때, 다음은 S_1, S_2, S_3, S_4 사이의 관계를 찾는 과정이다.

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O라 하면,

점 E가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로, $\triangle OAE = \boxed{\text{(가)}}$
또한, 점 F가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로, $\triangle OBF = \boxed{\text{(나)}}$
따라서 $S_2 = \triangle OAE + \boxed{\text{(나)}}$
같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG \therefore \boxed{\text{(다)}}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$
- ② (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
- ③ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$
- ④ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
- ⑤ (가) $\triangle OCG$ (나) $\triangle ODH$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

해설

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O라 하면
점 E가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로
 $\triangle OAE = \triangle OBE$
또한 점 F가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로
 $\triangle OBF = \triangle OCF$
 $\therefore S_2 = \triangle OAE + \triangle OCF$
같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG$
 $\therefore S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

27. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2, 7)$, $(-6, 4)$, $(5, -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ㉠ 2 ㉡ 3 ㉢ 4 ㉣ 5 ㉤ 6

해설

$A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$ $C(a_3, b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{b_3 + b_1}{2}\right) \text{ 이고}$$

이들의 합을 3 으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right) \text{ 로}$$

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G = \left(\frac{-2 - 6 + 5}{3}, \frac{7 + 4 - 2}{3}\right) = (-1, 3)$$

$\therefore 2$

28. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

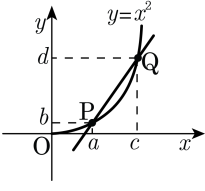
세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1+a+3}{3} = 1$, $\frac{6+b+4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

29. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$



해설

점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$
 즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ ($\because 0 < a < c$)
 $(\overline{PQ} \text{의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a}$
 $= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a}$
 $= c+a = \sqrt{d} + \sqrt{b} = 2$

30. 좌표평면 위의 점 A(-1, 0) 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B(0, 2) 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

- ㉠ $-\frac{1}{2}$ ㉡ $-\frac{1}{3}$ ㉢ $\frac{1}{3}$ ㉣ $\frac{1}{2}$ ㉤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x + 1)$

$$\therefore mx - y + m = 0$$

점 B(0, 2) 에서

$$\text{직선 } l \text{ 까지의 거리는 } \frac{|-2 + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$(2m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

31. 두 점 A(-2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, △ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$

$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$$

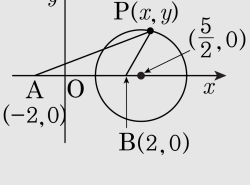
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

32. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① (3, 3)

② (3, -3)

③ (4, ± 4)

④ (± 4 , 4)

⑤ (4, ± 3)

해설

두 원이 외접하면 중심사이 거리는 반지름 길이 합과 같다.

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면,

$\Rightarrow$ i) $a^2 + b^2 = 25$

ii) $(a - 4)^2 + b^2 = 9$ 연립하면,

$a = 4, b = \pm 3$

$\therefore$ 중심은 (4, ± 3)

33. 두 원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 가 서로 외접할 때, 점 (a, b) 가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?
- ① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.
 - ② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$ 이다.
 - ③ 두 종류의 두형이 나타난다.
 - ④ 이 도형의 길이는 10π 이다.
 - ⑤ 원점을 지나는 원이다.

해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.

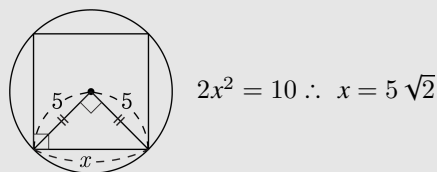
원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$ 에서 중심은 $(a, 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 에서 중심은 $(0, b)$, 반지름은 3이다.

따라서, $(a, 0)$ 과 $(0, b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$
 $\therefore a^2 + b^2 = 25$

그러므로 구하려는 자취는 $x^2 + y^2 = 25$

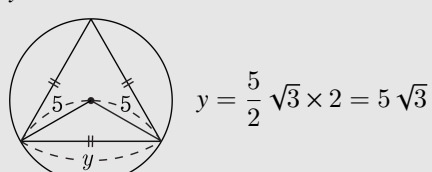
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를

x 라 하면



② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를

y 라 하면



$\therefore y = 5\sqrt{3}$ 이다.

34. 점 $(2, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식이 $y = a_1x + b_1, y = a_2x + b_2$ 일 때, $a_1a_2 - b_1b_2$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 하면, $(2, -1)$ 을 지나므로 $-1 = 2a + b \quad \therefore b = -2a - 1$

$y = ax - 2a - 1, \quad ax - y - 2a - 1 = 0$
원점과 접선과의 거리가 1이므로

$$\frac{|-2a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$$

$$|-2a - 1| = \sqrt{a^2 + 1}$$

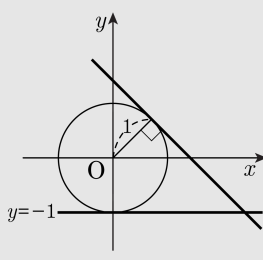
$$4a^2 + 4a + 1 = a^2 + 1, \quad 3a^2 + 4a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ or } -\frac{4}{3}$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}, \quad y = -1$$

$$\therefore a_1 = -\frac{4}{3}, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = \frac{5}{3}, \quad b_2 = -1$$

$$\therefore a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 = 0 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$$



35. 직선 $3x + 4y = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접한다. 이 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $3a + 4b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

직선 $3x + 4y = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
 $3(x - a) + 4(y - b) = 0$ 이므로
원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $3x + 4y - 3a - 4b = 0$ 이 접한다.
즉, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선
 $3x + 4y - 3a - 4b = 0$ 까지의 거리가
반지름의 길이 1 과 같다.
 $\therefore \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 3a - 4b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$
 $\therefore |-3a - 4b| = 5$
이 때, a, b 가 양수이므로
 $3a + 4b = 5$ 이다.