1. $a^2 - b^2 = 2$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은?

① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A, \ (a-b)^n = B$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right) \\ &= 4AB \\ &= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n \\ &= 4 \times 2^n \\ &= 2^{n+2}\end{aligned}$$

2. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^4-a^2}{a^6-1}$ 의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$a(a+1)=1$ 에서

$a^2=-a+1$

$$\begin{aligned} a^4 &= (-a+1)^2 = a^2-2a+1 \\ &= (-a+1)-2a+1 = -3a+2 \\ a^6 &= a^4\times a^2 = (-3a+2)(-a+1) \\ &= 3a^2-5a+2 = 3(-a+1)-5a+2 \\ &= -8a+5 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a^4-a^2}{a^6-1} = \frac{-3a+2-(-a+1)}{-8a+5-1} = \frac{-2a+1}{-8a+4} = \frac{-2a+1}{4(-2a+1)} = \frac{1}{4}$$

3. 모든 실수 x에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2+1$, $P(0) = 0$을 만족한다. 2차 이하의 다항식 $P(x)$의 계수의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$라 하면

$P(0) = 0$에서 $c = 0$ $\therefore$ $P(x) = ax^2 + bx$

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$이므로

$a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) = (ax^2+bx)^2 + 1$

$ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$

양변의 계수를 비교하면

$a = a^2,\ 2ab = 0,\ 2a + b = b^2,\ a + b = 1$

$a^2 = a$와 $a + b = 1$에서

$(a,\ b) = (0,\ 1),\ (1,\ 0)$이 되는데

이 중 $(1,\ 0)$은 $2a+b = b^2$을 만족하지 않으므로 $(a,\ b) = (0,\ 1)$

즉, $P(x) = x$뿐이다.

$\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$에서 $x = 0$을 대입하면

$P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$이 된다.

$P(1) = 1$($\therefore$모든 계수의 합은 $x = 1$대입)

4. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x-2)Q(x)+5, Q(x)=(x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x)=(x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$\quad\quad=(x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3)=-9-1=-10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3)=-3\times(-10)=30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3)=3$
$P(x)=(x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x)=x(x-2)Q(x)+5x\cdots$ ①
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3)=-3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3)=3$을 대입하면 $-3P(-3)=30$

5. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} = \frac{a^3 + 1}{(a-1)a + 1}$$

$$= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1}$$

$$= a + 1 = 10000$$

6. $f(2) = -15$, $g(-2) = 5$ 인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 의 곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$, 최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 일 때, $f(-2)+g(2)$ 의 값은?

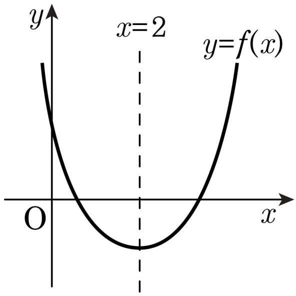
① 8 ② 18 ③ 28 ④ 38 ⑤ 48

해설

곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$ 이고,
최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 이므로
두 이차식은 $(x+3)(x-5)$, $(x+3)(x+7)$
$f(2) = -15$ 이므로 $f(x) = (x+3)(x-5)$
$g(-2) = 5$ 이므로 $g(x) = (x+3)(x+7)$

$$\begin{aligned} \therefore f(-2)+g(2) &= (-2+3)(-2-5)+(2+3)(2+7) \\ &= (-7)+45 = 38 \end{aligned}$$

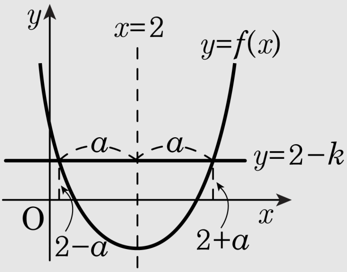
7. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



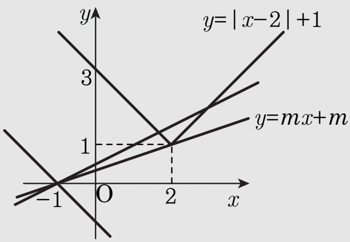
(ⅰ) $f(x) = 2 - k$를 만족시키는 x의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$의 교점의 x좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
(ⅱ) $f(x) = 2 + k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

8. 함수 $y = |x-2|+1$ 의 그래프가 직선 $y = mx+m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x-2| = x-2$ 이므로
$y = x-2+1 = x-1$
$x < 2$ 일 때, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로 $y = -x+2+1 = -x+3$
따라서, $y = |x-2|+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx+m = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx+m$ 이 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m+m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx+m$ 이 직선 $y = -x+3$ 과 평행할 때, $m = -1$
따라서, 직선 $y = mx+m$ 이 $y = |x-2|+1$ 의 그래프와 만나려면 기울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) + 1 = -\frac{3}{2}$$

10. $x=2$ 일 때 최솟값 -1을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$
\begin{aligned}
y &= a(x-2)^2-1 \\
&= a(x^2-4x+4)-1 \\
&= ax^2+4ax+4a-1
\end{aligned}
$$

$4a-1=3$

$a=1$

$y=(x-2)^2-1$

$apq=1\times2\times(-1)=-2$

11. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-4$

$\beta+\gamma=-2-\alpha,\ \gamma+\alpha=-2-\beta,\ \alpha+\beta=-2-\gamma$를 이용하면

(주어진 식)$=\dfrac{-2-\alpha}{\alpha}+\dfrac{-2-\beta}{\beta}+\dfrac{-2-\gamma}{\gamma}$

$=-2\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)-3$

$=-2\left(\dfrac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)-3=-\dfrac{3}{2}$

12. 두 부등식 $0.7 - x \leq -2 - 0.1x$, $\frac{2+x}{3} \geq x + a$의 공통 부분이 없을 때, a의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$0.7 - x \leq -2 - 0.1x 7 - 10x \leq -20 - x - 9x \leq -27,\ \ x \geq 3$

$\frac{2+x}{3} \geq x + a 2 + x \geq 3x + 3a - 2x \geq 3a - 2,\ \ x \leq 1 - \frac{3}{2}a$

공통 부분이 없으므로 $1 - \frac{3}{2}a < 3$,

$-\frac{3}{2}a < 2$

$\therefore\ \ a > -\frac{4}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

13. 연립부등식

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x+1) + 1 < 4x - 1 \\ -a < x < a \end{cases}$$

의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$　② $0 < a \leq 2$　③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \leq 3$　⑤ $2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x+1) + 1 < 4x - 1 \cdots ㉠ \\ -a < x < a \cdots ㉡ \end{cases}$$

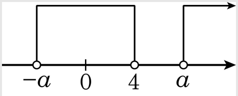
㉠ : $12 - x < 2(x+1) + 1$ 의 해는 $x > 3$

$2(x+1) + 1 < 4x - 1$ 의 해는 $x > 2$

$\therefore\ x > 3$

㉡ : $-a < x < a$

연립부등식의 해가 없으려면 다음 그림과 같아야 하므로 양수 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 3$ 이다.



14. 일의 자리 숫자가 십의 자리 숫자보다 5 만큼 큰 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수가 27 보다 크고 38 이하라고 한다. 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

십의 자리 숫자를 a 라 하면 일의 자리 숫자는 $a+5$ 이다.
즉 두 자리 자연수는 $10a+(a+5)=11a+5$ 이다.

$$27 < 11a + 5 \leq 38$$

$$22 < 11a \leq 33$$

$$2 < a \leq 3$$

a 는 자연수이므로 3 이다. 따라서 두 자리 자연수는 38 이다.

15. 1 개에 400 원 하는 껌과 600 원 하는 껌을 합하여 10 개를 사는데 그 값이 5300 원 이상 5500 원 이하가 되게 하려면 600 원짜리 껌을 몇 개 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

600 원 하는 껌의 개수를 x, 400 원 하는 껌의 개수를 $10-x$

$5300 \le 600x + 400(10-x) \le 5500$

$53 \le 6x + 40 - 4x \le 55$

$13 \le 2x \le 15$, $\frac{13}{2} \le x \le \frac{15}{2}$

$6.5 \le x \le 7.5$

$\therefore x = 7$

16. 사료 A, B 의 1g 당 영양소 C, D 의 함유량과 100g 당 단가는 다음과 같다.

	C(mg)	D(mg)	단가(원)
A	21	15	500
B	16	19	600

하루에 두 사료를 모두 합해 0.3kg 먹는 어떤 동물의 1 일 영양소 섭취량이 C 는 60g 이하, D 는 50g 이하가 되게 하려고 한다. 구입한 사료의 가격이 가장 쌀 때, 사료 B 의 무게를 구하여라.

▶ 답： g

▷ 정답： 60 g

해설

사료 A 의 무게를 xg 이라 하면 사료 B 의 무게는 $(300-x)$ g 이다.
C 가 60g 이하이므로
$0.21x+0.16(300-x) \le 60 \cdots$ ㉠
D 가 50g 이하이므로
$0.15x+0.19(300-x) \le 50 \cdots$ ㉡
㉠ 을 풀면 $x \le 240$
㉡ 을 풀면 $x \ge 175$
$\therefore\ 175 \le x \le 240$
구입한 사료의 가격이 가장 싸려면 A 를 많이 구입해야 하고 B 는 적게 구입해야 한다. 따라서 구하는 사료 B 의 무게는 $300-240=60$ (g) 이다.

17. 부등식 $|2x+2| < a+3$를 만족하는 실수 x값이 존재하기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a \le -4$ ② $a > -4$ ③ $a < -3$
④ $a > -3$ ⑤ $a \le -1$

해설

i) $x \ge -1$일 때,

$2x+2 < a+3,\ 2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$

$x \ge -1,\ x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} > -1,\ a > -3$

ii) $x < -1$일 때,

$-2x-2 < a+3,\ -2x < a+5$

$x < -1,\ x > -\frac{1}{2}a - \frac{5}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$-\frac{1}{2}a - \frac{5}{2} < -1 \quad \therefore a > -3$

i), ii)에 의하여 $a > -3$

18. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$ ② $-2 \le x < 5$ ③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$ ⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서

$n-1 < [x-1] < n$이므로

$[x-1] = [x] - 1$

$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$

$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$

$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$

$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$

$$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$$

$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로

$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

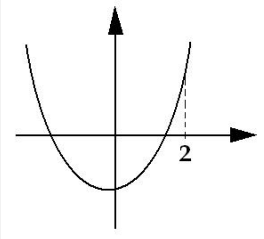
$\therefore 1 \le x < 5$

19. $x>2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+k-1>0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4=k^2-k+1>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2)\geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k<2$ ······㉠

$f(2)=3-3k\geq 0$에서 $k\leq 1$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $k\leq 1$

k의 최댓값은 1이다.

20. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $p<x<q$일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해를 p, q를 써서 나타내면? (단, $p>0$)

① $x>q$ 또는 $x<p$

② $\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}$

③ $x>\frac{1}{p}$

④ $x<\frac{1}{q}$

⑤ $x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $p<x<q$ 라면

$(a<0$ 이므로$)$ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$

$\Leftrightarrow (x-p)(x-q)<0$, $x-(p+q)x+pq<0$

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

$cx^2+bx+a<0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0\ (\because a<0)$

$\Leftrightarrow pqx^2-(p+q)x+1>0$

$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1)>0$

$\therefore x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p}>\frac{1}{q}\right)$

21. 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=1$이 a의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le b\le\frac{\sqrt{2}}{2}$
② $b\le-\frac{\sqrt{2}}{2},\ b\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$
③ $-\frac{\sqrt{2}}{3}\le b\le\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $b\le-\frac{\sqrt{2}}{3},\ b\ge\frac{\sqrt{2}}{3}$
⑤ $b\le-2,\ b\ge2$

해설

$x^2+(a-b)x+ab-1=0$에서

$D=(a-b)^2-4(ab-1)\ge0$

이 식을 a에 관해서 정리하면, $a^2-6ba+b^2+4\ge0$이

부등식이 a에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4}\le 0$

이므로

$$\frac{D'}{4}=(3b)^2-(b^2+4)\le0$$

$\therefore\ 2b^2-1\le0$에서

$(\sqrt{2}b+1)(\sqrt{2}b-1)\le0$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\le b\le\frac{1}{\sqrt{2}}$$

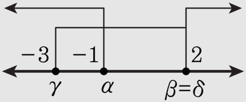
$$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\le b\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

22. 두 부등식 $x^2+ax+b \geq 0$, $x^2+cx+d \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 범위가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x=2$라고 한다.
이 때 $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -8 ④ -10 ⑤ -3

해설

$x^2+ax+b \geq 0$의 해를 $x \leq \alpha$, $x \geq \beta$
$x^2+cx+d \leq 0$의 해를 $\gamma \leq x \leq \delta$라고 하면



공통의 해가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x=2$이려면
다음 그림에서와 같이 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$, $\delta=2$이어야 한다.
$\therefore x^2+ax+b=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$이므로 $a=-1$, $b=-2$
$x^2+cx+d=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$이므로 $c=1$, $d=-6$
따라서 $a+b+c+d=-1+(-2)+1+(-6)=-8$

23. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$이고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이므로

$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$

$\therefore \ x = \pm 6$

$x > 0$이므로 $x = 6$

24. 좌표평면 위의 두 점 $A(7,4)$, $B(8,6)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 32

해설

$A(7,\ 4)$를 $y=x$에 대칭이동한 점 $C(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$
가 최소인 점 P는
선분 BC와 직선 $y=x$의 교점이다.

$y=-\frac{1}{4}x+8$와 $y=x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5},\ \frac{32}{5}\right)$

$\therefore\ 5a=32$

25. 직선 $x+y=1$은 두 점, $A(-2,\ 0)$, $B(0,\ 7)$을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① $3:2$ ② $2:3$ ③ $1:1$ ④ $2:1$ ⑤ $1:2$

해설

선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점을 P라 하면,
점 P의 좌표는

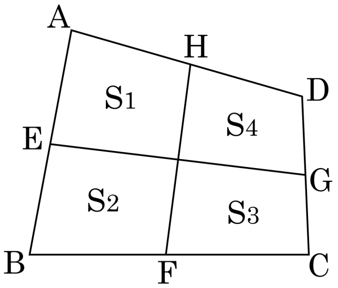
$$\left(\frac{m\cdot 0+n\cdot(-2)}{m+n},\ \frac{m\cdot 7+n\cdot 0}{m+n}\right)=\left(\frac{-2n}{m+n},\ \frac{7m}{m+n}\right)$$

그런데, 점 P는 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로 대입하면,

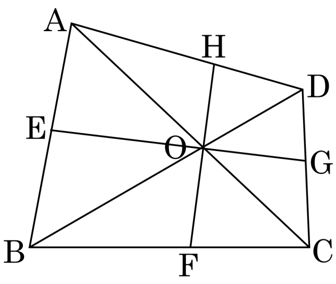
$$\frac{-2n}{m+n}+\frac{7m}{m+n}=1,\ -2n+7m=m+n,\ 2m=n$$

$\therefore\ m:n=1:2$

26. 다음 그림과 같이 내각의 크기가 모두 $180°$ 보다 작은 사각형 ABCD 가 있다.



네 변 AB, BC, CD, DA 의 중점을 각각 E, F, G, H 라 하고, $\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 에 의하여 나누어진 사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 라 할 때, 다음은 S_1, S_2, S_3, S_4 사이의 관계를 찾는 과정이다.

> $\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면,
>
> 
>
>
> 점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로, $\triangle OAE = \boxed{(가)}$
> 또한, 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로, $\triangle OBF = \boxed{(나)}$
> 따라서 $S_2 = \triangle OAE + \boxed{(나)}$
> 같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG$ ∴ $\boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가) △OBE (나) △OCF (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

② (가) △OBE (나) △OCF (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

③ (가) △OAH (나) △OBE (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

④ (가) △OAH (나) △OBE (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

⑤ (가) △OCG (나) △ODH (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

해설

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면
점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로
$\triangle OAE = \triangle OBE$
또한 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로
$\triangle OBF = \triangle OCF$
$\therefore\ S_2 = \triangle OAE + \triangle OCF$
같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG$
$\therefore\ S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

27. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2+a_3}{2},\ \frac{b_2+b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3+a_1}{2},\ \frac{b_3+b_1}{2}\right)$$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$$ 로

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G=\left(\frac{-2-6+5}{3},\ \frac{7+4-2}{3}\right)=(-1,\ 3)$$

$\therefore\ 2$

28. $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(1, 4) 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b),$(3, 4)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

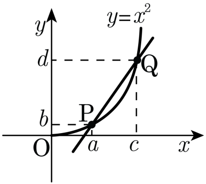
$\triangle$ABC 의 무게중심 G 는

세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로

$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

29. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{5}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(c,d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$

즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ $(\because\ 0 < a < c)$

$$(\overline{\mathrm{PQ}} \text{ 의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a}$$
$$= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a}$$
$$= c+a = \sqrt{d}+\sqrt{b} = 2$$

30. 좌표평면 위의 점 $A(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $B(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x+1)$

$\therefore\ mx - y + m = 0$

점 $B(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2 + 4m + 1 = 0$

$(2m+1)^2 = 0$

$\therefore\ m = -\dfrac{1}{2}$

31. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $3 : 1$ 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, $\triangle$ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 3 : 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 3\overline{\mathrm{BP}} \rightarrow \overline{\mathrm{AP}}^2 = 9\overline{\mathrm{BP}}^2$

따라서, $(x+2)^2+y^2 = 9(x-2)^2+9y^2$

$\rightarrow x^2+4x+4+y^2 = 9x^2-36x+36+9y^2$

$\rightarrow 8x^2+8y^2-40x+32 = 0$

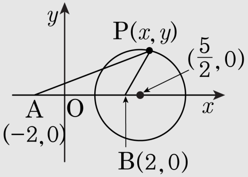
$\rightarrow x^2+y^2-5x+4 = 0$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2-\frac{25}{4}+4 = 0$$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2} = 3$

32. 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-4)^2+y^2=1$ 에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① $(3,\ 3)$ ② $(3,\ -3)$ ③ $(4,\ \pm4)$

④ $(\pm4,\ 4)$ ⑤ $(4,\ \pm3)$

해설

두 원이 외접하면 중심사이 거리는 반지름 길이 합과 같다.

중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면,

$\Rightarrow$ i) $a^2+b^2=25$

ii) $(a-4)^2+b^2=9$ 연립하면,

$a=4,\quad b=\pm3$

$\therefore$ 중심은 $(4,\pm3)$

33. 두 원 $(x-a)^2+y^2=4$, $x^2+(y-b)^2=9$가 서로 외접할 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.

② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

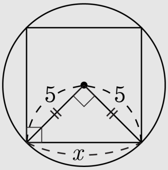
③ 두 종류의 두형이 나타난다.

④ 이 도형의 길이는 10π이다.

⑤ 원점을 지나는 원이다.

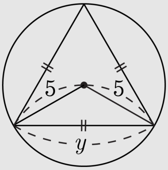
해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.
원 $(x-a)^2+y^2=4$에서 중심은 $(a,\ 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2+(y-b)^2=9$에서 중심은 $(0,\ b)$, 반지름은 3이다.
따라서, $(a,\ 0)$과 $(0,\ b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2+b^2}=5$
$\therefore a^2+b^2=25$
그러므로 구하려는 자취는 $x^2+y^2=25$
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면



$2x^2=10 \therefore\ x=5\sqrt{2}$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 y라 하면



$y=\frac{5}{2}\sqrt{3}\times 2=5\sqrt{3}$

$\therefore\ y=5\sqrt{3}$ 이다.

34. 점 $(2,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식이 $y=a_1x+b_1,\ y=a_2x+b_2$일 때, $a_1a_2-b_1b_2$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

접선의 방정식을 $y=ax+b$라고 하면, $(2,\ -1)$을 지나므로 $-1=2a+b$ $\therefore\ b=-2a-1$

$y=ax-2a-1,\quad ax-y-2a-1=0$

원점과 접선과의 거리가 1이므로

$$\frac{|-2a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$$

$|-2a-1|=\sqrt{a^2+1}$

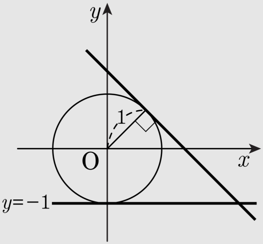
$4a^2+4a+1=a^2+1,\quad 3a^2+4a=0$

$\therefore\ a=0\ or\ -\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3},\quad y=-1$

$\therefore\ a_1=-\frac{4}{3},\quad a_2=0,\quad b_1=\frac{5}{3},\quad b_2=-1$

$\therefore\ a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2=0-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$



35. 직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2=1$ 에 접한다. 이 때, 두 양수 a , b 에 대하여 $3a+4b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

직선 $3x+4y=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$3(x-a)+4(y-b)=0$ 이므로
원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y-3a-4b=0$ 이 접한다.
즉, 원의 중심 $(0,\ 0)$ 에서 직선
$3x+4y-3a-4b=0$ 까지의 거리가
반지름의 길이 1 과 같다.

$$\therefore \frac{|3\times 0+4\times 0-3a-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

$\therefore |-3a-4b|=5$
이 때, a , b 가 양수이므로
$3a+4b=5$ 이다.