1. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$ ② 0 ③ $3^{2007}+1$
④ 1 ⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

2. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x=1$을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots$ ①

$x=-1$을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots$ ②

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{50} = 0$

3. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

4. 삼각형의 세변의 길이를 $x,\ y,\ z$라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y,\ z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$
$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$
$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$
$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$
$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because\ x,\ y,\ z$는 모두 양수)
$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

5. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변삼각형

② $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형

③ $b=c$인 이등변삼각형

④ $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$

$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a=-b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

a, b, c 모두 양수이므로, $c^2=a^2+b^2$

$\therefore \angle C=90^\circ$인 직각삼각형

6. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2=2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

7. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

> $A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
> $A = ag$, $B = bg$ (a, b, g 는 다항식)$\cdots$㉠로 쓸 수 있다.
> 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
> $\therefore$ g 는 B, R 의 공약수이다. $\cdots$㉡
> 역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
> $B = b'g'$, $R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식)$\cdots$㉠$'$ 으로 쓸 수 있다.
> 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
> $\therefore$ g' 은 A, B 의 공약수이다. $\cdots$ ㉡$'$
> 이상에서 $\{g \mid g$ 는 A, B 의 공약수$\} = \{g' \mid g'$ 은 B, R 의 공약수$\}\cdots$ ㉢
> $\therefore$ A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. $\cdots$ ㉣

위 과정에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㉠, ㉠$'$　② ㉡, ㉡$'$　③ ㉢
④ ㉣　⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

8. 복소수 $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)에 대하여 $\alpha^* = b + ai$로 나타낸다.$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$ ② $3+3i$ ③ $2+3i$
④ $1+3i$ ⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha\cdot a^*)^4\\ &= 5\cdot\frac{4+3i}{5}\cdot i^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

9. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$　　② $-\alpha,\ -\beta$　　③ $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$

④ $-\dfrac{1}{\alpha},\ -\dfrac{1}{\beta}$　　⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \dfrac{b}{a},\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

(두 근의 합) $= \dfrac{b}{c} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} \left(\therefore \dfrac{b}{c} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$

(두 근의 곱) $= \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\alpha\beta}$

따라서 구하는 두 근은 $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$a - \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} = 0$

이 때, $\dfrac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$t = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $\dfrac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $\dfrac{1}{\beta}$이다.

10. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$ ② $2 \le m < 3$ ③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \le 3$ ⑤ $3 < m \le 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(ⅰ) $\frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \ge 0$

$m^2 - m - 2 \ge 0$, $(m-2)(m+1) \ge 0$

$\therefore\ m \le -1,\ m \ge 2$

(ⅱ) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore\ m > 1$

(ⅲ) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore\ m < 3$

$\therefore$ (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 공통범위는 $2 \le m < 3$

11. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$이 허근을 갖기 위한 k의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$

$x=1$일때 성립하므로 $x-1$을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$(x-1)(x^2-2x+-k)=0$

허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$\therefore\ k<4$

12. x에 관한 삼차방정식 $kx^3+(1-2k)x^2+(k-2)x-2k=0$의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $0<k\le\frac{1}{2}$　② $0<k\le 1$　③ $-\frac{1}{2}<k\le 0$
④ $-\frac{1}{2}<k\le\frac{1}{2}$　⑤ $0<|k|\le\frac{1}{2}$

해설

준식 $=(x-2)(kx^2+x+k)=0$에서
$kx^2+x+k=0$이 실근이어야하므로
$D=1-4k^2\ge 0$,
$k\ne 0$이므로 $0<|k|\le\frac{1}{2}$

13. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$이 단 한 개의 공통근을 가진다. $-1 \le a \le 0$일 때 $a^2 + b^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots$ ①

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots$ ②

① − ② : $(a-b)(\alpha-1) = 0$에서

$a \ne b$이므로 $\alpha = 1$

$1 + a + b = 0$에서 $b = -a - 1$

$a^2 + b^2 = a^2 + (-a-1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$

$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$-1 \le a \le 0$이므로 $M = 1$, $m = \frac{1}{2}$

14. $a<0$이고 $a+b=0$일 때, 부등식$(a-b)x-a-2b<0$의 해는?

① $x<-\dfrac{1}{2}$ ② $x>-\dfrac{1}{2}$ ③ $x>2$

④ $x<-2$ ⑤ $x>1$

해설

$a+b=0$에서 $b=-a$를 부등식에 대입하면

$(a+a)x-a+2a<0,\ 2ax+a<0,\ 2ax<-a$

$\therefore\ x>-\dfrac{1}{2}(\because\ 2a<0)$

15. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답: ＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 2 개

해설

$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6 을 곱하면 $2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$,

$4x + 8 \geq 3x - 6 - 6x$,

$x \geq -2$

$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10 을 곱하면 $3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$,

$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3$,

$x \leq 6$

$1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면

$12x - 5 < 8x + 6$,

$4x < 11$,

$x < \frac{11}{4}$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \frac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 1, 2 의 2 개이다.

16. 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x-3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$이다. $-ax + b \geq 0$을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x < a + 11$, $x < \dfrac{a+11}{5}$

$x - b < 3x - 9$, $9 - b < 2x$, $\dfrac{9-b}{2} < x$

$\dfrac{a+11}{5} = 3 \quad \therefore\ a = 4$

$\dfrac{9-b}{2} = 1 \quad \therefore\ b = 7$

$a = 4$, $b = 7$을 $-ax + b \geq 0$에 대입하여 정리하면

$-4x + 7 \geq 0$

$x \leq \dfrac{7}{4}$이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1이다.

17. 연립부등식 $\begin{cases} x-5 \le 3x+3 \\ \dfrac{-x+a}{3} \ge x \end{cases}$ 의 해가 $x=m$ 일때, $\dfrac{a}{m}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\begin{cases} x-5 \le 3x+3 \\ \dfrac{-x+a}{3} \ge x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x \le 8 \\ -x+a \ge 3x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x \le \dfrac{a}{4} \end{cases}$

해가 $x=m$ 이므로 $m=-4$ 이다.

$\dfrac{a}{4}=-4,\ a=-16$

$\therefore\ \dfrac{a}{m}=\dfrac{-16}{-4}=4$

18. 1 개에 1,000 원 하는 볼펜과 1 개에 2,000 원 하는 노트를 합쳐서 30 개를 사려고 한다. 노트를 볼펜보다 많이 사고 전체 금액이 54,000 원 이하가 되도록 하려고 한다. 노트를 최소 a 개, 최대 b 개 살 수 있다면, $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \times b = 384$

해설

노트의 개수를 x 라고 놓으면 볼펜의 개수는 $30 - x$ 이다. 노트를 볼펜보다 많이 사게 되면 $x > 30 - x$ 이다.
볼펜과 노트를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $2000x + 1000(30 - x)$ 이다. 또 전체 금액은 54,000 원 이하가 되어야 하기 때문에 $2000x + 1000(30 - x) \le 54000$ 이다.
위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x > 30 - x \\ 2000x + 1000(30 - x) \le 54000 \end{cases}$$ 이다.

이를 간단히 하면 $\begin{cases} x > 15 \\ x \le 24 \end{cases}$ 이다.

따라서 $15 < x \le 24$ 이다.
그러므로 노트는 최소로 16 개, 최대로 24 개 살 수 있다.
따라서 $a = 16$, $b = 24$ 이다.
$\therefore 16 \times 24 = 384$

19. 8% 의 소금물 200 g 이 있다. 여기에 x g 의 소금을 섞어서 10% 이상 20% 미만의 농도를 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{40}{9} \le x < 30$

해설

8% 의 소금물 200 g 의 소금의 양은

$\frac{8}{100} \times 200 = 16\,(\mathrm{g})$ 이다.

따라서 소금 x g 을 추가하였을 때의 농도를 나타내면 $\frac{16+x}{200+x} \times 100$ 이다.

이 값이 10% 이상 20% 미만이므로,

$10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 \\ \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \ge \frac{40}{9} \\ x < 34 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $\frac{40}{9} \le x < 30$ 이다.

20. 부등식 $ax^2 + bx + a^2 > 2$ (a, b 는 실수) 의 해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -5　　② -6　　③ -7　　④ -8　　⑤ -9

해설

$ax^2 + bx + a^2 - 2 > 0 \cdots\cdots$ ㉠
해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 인 이차부등식은
$\left\{x - (1 - \sqrt{2})\right\}\left\{x - (1 + \sqrt{2})\right\} < 0$
즉, $x^2 - 2x - 1 < 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 부등호의 방향이 같으려면
$a < 0$ 이어야 한다.
㉡의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - 2ax - a > 0$
㉠과 일치하여야 하므로
$b = -2a,\ a^2 - 2 = -a$
$a^2 - 2 = -a$ 에서 $(a - 1)(a + 2) = 0$
그런데, $a < 0$ 이므로 $a = -2,\ b = 4$
$\therefore\ 2a - b = -8$

21. 부등식 $x^2 - 4x + 3 > 0$과 $2x^2 + (a-8)x - 4a < 0$을 동시에 만족하는 정수인 x의 값이 0뿐 일 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a \le 2$　② $0 \le a < 2$　③ $0 < a \le 2$
④ $-1 < a \le 0$　⑤ $-1 \le a < 0$

해설

$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) > 0$

$\therefore\ x > 3$ 또는 $x < 1 \cdots$ ①

$2x^2 + (a-8)x - 4a$

$= (2x+a)(x-4) < 0$

한편, 만족하는 해가 0뿐이므로

$-\frac{a}{2} < 4$

$\therefore\ -\frac{a}{2} < x < 4 \cdots$ ②

①과 ②에 의하여 $-1 \le -\frac{a}{2} < 0$

$\therefore\ 0 < a \le 2$

22. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 $a,\ b$에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 2+$③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because$ b는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because$ a는 정수)

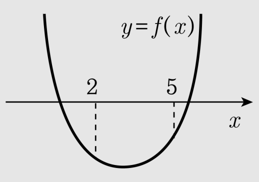
$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

23. 이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

이차방정식 $x^2-7x+10=0$에서
$(x-2)(x-5)=0 \therefore\ x=2$ 또는 $x=5$
$f(x)=x^2-6x+k$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)<0$, $f(5)<0$ 이므로
$f(2)=-8+k<0$에서 $k<8$
$f(5)=-5+k<0$에서 $k<5$
$\therefore\ k<5 \quad \therefore$ 정수 k의 최댓값은 4 이다.

24. 네 점 $\mathrm{A}(-2, 3)$, $\mathrm{B}(3, \mathrm{a})$, $\mathrm{C}(\mathrm{b}, 4)$, $\mathrm{D}(2, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 □ABCD 가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

□ABCD 가 마름모이므로
$\overline{\mathrm{AD}} \mathbin{/\!/} \overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이다.
따라서 점 D는 점 A를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ (3+4,\ a+5) = (b,\ 4)$
$\therefore\ a = -1,\ b = 7$
$\therefore\ a + b = 6$

25. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$　　② $(-2,\ -5)$　　③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$　　⑤ $(3,\ 2)$

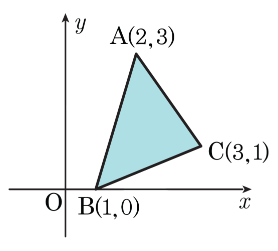
해설

직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
$12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5 \cdots\cdots$ ①
또, 점 P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1 \cdots\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
$A(-2,1), B(4,-3)$의 수직이등분선 위에 있다.
$\overline{AB}$의 기울기는 $\frac{1+3}{-2-4}=-\frac{2}{3}$이므로
수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$, $A(-2,1), B(4,-3)$ 의 중점 $(1,-1)$
를 지나므로
$\therefore\ y+1=\frac{3}{2}(x-1)\ \cdots$①
구하는 점 P는 $y=2x-1$과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x=-3, y=-7$
$\therefore\ P(-3,\ -7)$

26. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

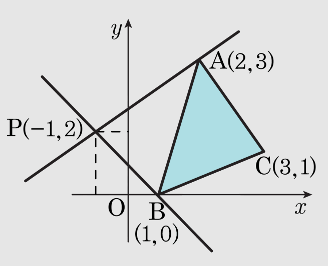


① $-1 \leq m \leq 3$　② $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$　④ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$

⑤ $1 \leq m \leq 3$

해설



직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 P(−1, 2) 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\leq -m \leq$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$

$-1 \leq -m \leq \frac{1}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$

27. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은 ?

① 2 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

해설

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$

두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면

$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$

$4x - ky + 10 = 0 \cdots$ ①

그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$은 일치해야 하므로

$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$

$\therefore\ k = 2,\ m = -\frac{5}{2}$

$\therefore\ m + k = -\frac{1}{2}$

29. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로

$$d=\frac{|3\cdot3+4\cdot1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm10$

따라서, $a=3$ 또는 23 이므로

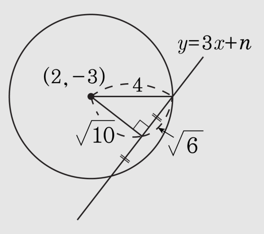
모든 a 값들의 합은 26

30. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18　② 18　③ -22　④ 22　⑤ 0

해설

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$ 이고



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2,\ -3)$ 의 거리

$\dfrac{|6+3+n|}{\sqrt{3^2+1}} = \sqrt{10}$

$|9+n| = 10$

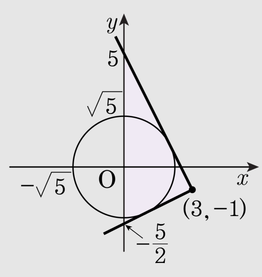
$\therefore\ n = \pm 10 - 9 = 1\ or\ -19$

$\therefore\ 1 - 19 = -18$

31. 점 $(3,\ -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33 ② 35 ③ 45 ④ 49 ⑤ 55

해설



점 $(3,\ -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을

$y+1=m(x-3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심에서 직선 $y+1=m(x-3)$,

즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면,

$2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$, $y=-2x+5$ 이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\dfrac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\dfrac{45}{4}$ 이다.

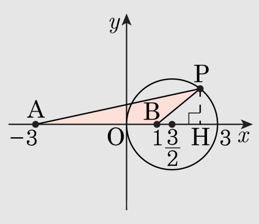
$\therefore\ 4S=45$

32. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(1,\ 0)$으로 부터의 거리의 비가 $3\ :\ 1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

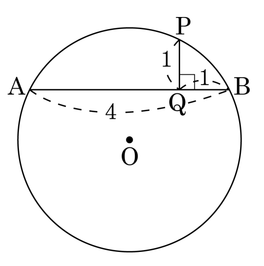
해설

주어진 조건에서 $\overline{AP}\ :\ \overline{BP} = 3\ :\ 1$이므로
$\overline{AP} = 3\overline{BP}$
$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면
$(x+3)^2 + y^2 = 9\left(x-1)^2 + y^2\right\}$
$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$
따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고
반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 위를 움직인다.
그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선
의 발을
H라 하면



$\triangle PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH}$
이 때, $\overline{AB} = 4$이고 $\overline{PH}$
의 길이의 최댓값은 반지름의 길이
$\frac{3}{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$

33. 다음 그림과 같이 한 원 O 의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{BQ}} = 1$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.

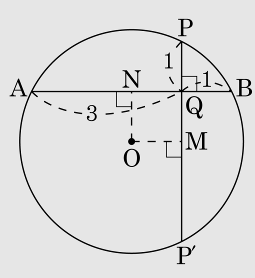


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 연장선과 원 O 의 교점을 P′ 이라 하면



$\overline{\mathrm{P'Q}} = 3$ $(\because \overline{\mathrm{PQ}} \cdot \overline{\mathrm{P'Q}} = \overline{\mathrm{AQ}} \cdot \overline{\mathrm{BQ}})$

또, 원 O 의 중심에서 $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{PP'}}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M 이라 하면

원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{NB}} = \overline{\mathrm{PM}} = 2$

따라서 $\overline{\mathrm{NQ}} = \overline{\mathrm{QM}} = 1$ 이 되므로

□OMQN 은 정사각형이다.

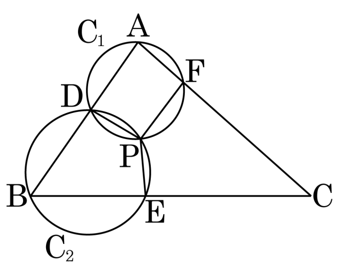
$\therefore \ \overline{\mathrm{OM}} = 1,\ \overline{\mathrm{PM}} = 2$

그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$r = \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$r^2 = 5$

34. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\quad\text{다}\quad}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

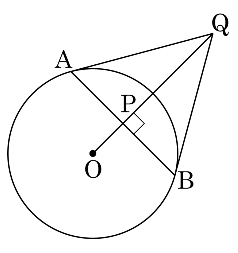
$\angle FPE = \angle A + \angle B$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,

세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

35. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.

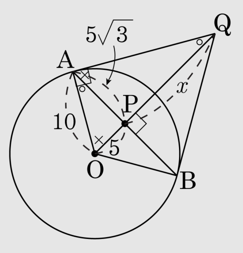


▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해



$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$
$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.
또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로
$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.
$\therefore\ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$