

1. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{2007} + 1 = a_0 + a_1(x+4) + a_2(x+4)^2 + \cdots + a_{2007}(x+4)^{2007}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값은?

① $(-3)^{2007} + 1$

② 0

③ $3^{2007} + 1$

④ 1

⑤ $3^{2007} + 3$

해설

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$(-3)^{2007} + 1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007}$$

2. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2^{24}

④ 2^{25}

⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

3. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z 라 하면 주어진 조건으로부터

$$x + y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 이므로

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{에서 } 0^2 = 1 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore xy + yz + zx = -\frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$3xyz = 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore xyz = -\frac{1}{3}$$

$$\text{또, } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } x + y + z = 0 \text{ 이므로}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

4. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z 라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

- ① x 가 빗변인 직각삼각형
- ② y 가 빗변인 직각삼각형
- ③ z 가 빗변인 직각삼각형
- ④ $x = y$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $x = y, z$ 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & (x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z \\ &= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z \\ &= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z \\ &\therefore (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0 \\ &x^2 + z^2 - y^2 = 0 \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수}) \\ &\therefore x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y \text{가 빗변인 직각삼각형} \end{aligned}$$

5. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a = b$ 인 이등변삼각형

② $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$$a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$$

$$a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$a = -b \text{ 또는 } c^2 = a^2 + b^2$$

$$a, b, c \text{ 모두 양수이므로, } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ \text{인 직각삼각형}$$

6. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $(a + b - c)(a - b + c) = b(b + 2c) + (c + a)(c - a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$$(a + b - c)(a - b + c)$$

$$= b(b + 2c) + (c + a)(c - a) \text{에서}$$

$$\{a + (b - c)\}\{a - (b - c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$$

$$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$2a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

7. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

$A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
 $A = ag, B = bg$ (a, b, g 는 다항식) ... ㉠로 쓸 수 있다.
 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.

$\therefore g$ 는 B, R 의 공약수이다. ... ㉡

역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면

$B = b'g', R = r'g'$ (b', r', g' 는 다항식) ... ㉠' 으로 쓸 수 있다.
 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.

$\therefore g'$ 은 A, B 의 공약수이다. ... ㉡'

이상에서 $\{g \mid g \text{ 는 } A, B \text{ 의 공약수}\} = \{g' \mid g' \text{ 은 } B, R \text{ 의 공약수}\}$... ㉢

$\therefore A, B$ 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. ... ㉣

위 과정에서 옳지 않은 것은?

① ㉠, ㉠'

② ㉡, ㉡'

③ ㉢

④ ㉣

⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

8. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$ 로 나타낸다. $\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4 + 3i$

② $3 + 3i$

③ $2 + 3i$

④ $1 + 3i$

⑤ $-1 + 3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a + bi)(b + ai) \\ &= ab + a^2i + b^2i - ab = (a^2 + b^2)i\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{4+3i}{5} \text{ 이므로 } \alpha\alpha^* = \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned}\therefore 5\alpha^5(\alpha^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot \alpha^*)^4 \\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4 \\ &= 4 + 3i\end{aligned}$$

9. a, b, c 는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$ 의 해가 α, β 일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$ 의 해를 구하면?

① α, β

② $-\alpha, -\beta$

③ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

④ $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$

⑤ $\alpha, -\beta$

해설

$$\alpha + \beta = \frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$cx^2 - bx + a = 0 \text{에서}$$

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad \left(\because \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$ 의 양변을 $x^2 (\neq 0)$ 으로 나누면

$$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

이 때, $\frac{1}{x} = t$ 라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } \frac{1}{\beta}$$

$\therefore cx^2 - bx + a = 0$ 의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$ 이다.

10. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$ 의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$

② $2 \leq m < 3$

③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \leq 3$

⑤ $3 < m \leq 4$

해설

두 근을 α, β 라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) \quad \frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \geq 0$$

$$m^2 - m - 2 \geq 0, (m-2)(m+1) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -1, m \geq 2$$

$$(ii) \quad \alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore m > 1$$

$$(iii) \quad \alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore m < 3$$

$\therefore (i), (ii), (iii)$ 의 공통범위는 $2 \leq m < 3$

11. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$ 이 허근을 갖기 위한 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0 \text{에서 } x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$$

$x=1$ 일때 성립하므로 $x-1$ 을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$$(x-1)(x^2-2x+5-k)=0$$

허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$ 의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$$\therefore k<4$$

12. x 에 관한 삼차방정식 $kx^3 + (1-2k)x^2 + (k-2)x - 2k = 0$ 의 근이 모두 실수가 되기 위한 실수 k 의 범위를 구하면?

① $0 < k \leq \frac{1}{2}$

② $0 < k \leq 1$

③ $-\frac{1}{2} < k \leq 0$

④ $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{1}{2}$

⑤ $0 < |k| \leq \frac{1}{2}$

해설

준식 = $(x-2)(kx^2 + x + k) = 0$ 에서
 $kx^2 + x + k = 0$ 이 실근이어야하므로

$$D = 1 - 4k^2 \geq 0,$$

$$k \neq 0 \text{ 이므로 } 0 < |k| \leq \frac{1}{2}$$

13. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 이 단 한 개의 공통근을 가진다.
 $-1 \leq a \leq 0$ 일 때 $a^2 + b^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α 라 하면

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ①$$

$$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots ②$$

$$① - ② : (a - b)(\alpha - 1) = 0 \text{에서}$$

$$a \neq b \text{이므로 } \alpha = 1$$

$$1 + a + b = 0 \text{에서 } b = -a - 1$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + (-a - 1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$$

$$= 2 \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$-1 \leq a \leq 0 \text{이므로 } M = 1, m = \frac{1}{2}$$

14. $a < 0$ 이고 $a + b = 0$ 일 때, 부등식 $(a - b)x - a - 2b < 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{2}$

② $x > -\frac{1}{2}$

③ $x > 2$

④ $x < -2$

⑤ $x > 1$

해설

$a + b = 0$ 에서 $b = -a$ 를 부등식에 대입하면

$$(a + a)x - a + 2a < 0, \quad 2ax + a < 0, \quad 2ax < -a$$

$$\therefore x > -\frac{1}{2} (\because 2a < 0)$$

15. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \text{의 양변에 } 6 \text{ 을 곱하면 } 2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x,$$

$$4x + 8 \geq 3x - 6 - 6x,$$

$$x \geq -2$$

$$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \text{의 양변에 } 10 \text{ 을 곱하면 } 3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3,$$

$$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3,$$

$$x \leq 6$$

$$1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \text{의 양변에 } 10 \text{ 을 곱하면}$$

$$12x - 5 < 8x + 6,$$

$$4x < 11,$$

$$x < \frac{11}{4}$$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \frac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 1, 2 의 2 개이다.

16. 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x - 3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이다. $-ax + b \geq 0$

을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$5x < a + 11, x < \frac{a + 11}{5}$$

$$x - b < 3x - 9, 9 - b < 2x, \frac{9 - b}{2} < x$$

$$\frac{a + 11}{5} = 3 \quad \therefore a = 4$$

$$\frac{9 - b}{2} = 1 \quad \therefore b = 7$$

$a = 4, b = 7$ 을 $-ax + b \geq 0$ 에 대입하여 정리하면
 $-4x + 7 \geq 0$

$x \leq \frac{7}{4}$ 이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1 이다.

17. 연립부등식 $\begin{cases} x-5 \leq 3x+3 \\ \frac{-x+a}{3} \geq x \end{cases}$ 의 해가 $x=m$ 일때, $\frac{a}{m}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{cases} x-5 \leq 3x+3 \\ \frac{-x+a}{3} \geq x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x \leq 8 \\ -x+a \geq 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq \frac{a}{4} \end{cases}$$

해가 $x=m$ 이므로 $m = -4$ 이다.

$$\frac{a}{4} = -4, a = -16$$

$$\therefore \frac{a}{m} = \frac{-16}{-4} = 4$$

18. 1개에 1,000 원 하는 볼펜과 1 개에 2,000 원 하는 노트를 합쳐서 30 개를 사려고 한다. 노트를 볼펜보다 많이 사고 전체 금액이 54,000 원 이하가 되도록 하려고 한다. 노트를 최소 a 개, 최대 b 개 살 수 있다면, $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \times b = 384$

해설

노트의 개수를 x 라고 놓으면 볼펜의 개수는 $30 - x$ 이다. 노트를 볼펜보다 많이 사게 되면 $x > 30 - x$ 이다.

볼펜과 노트를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $2000x + 1000(30 - x)$ 이다. 또 전체 금액은 54,000 원 이하가 되어야 하기 때문에 $2000x + 1000(30 - x) \leq 54000$ 이다.

위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x > 30 - x \\ 2000x + 1000(30 - x) \leq 54000 \end{cases} \quad \text{이다.}$$

$$\text{이를 간단히 하면 } \begin{cases} x > 15 \\ x \leq 24 \end{cases} \quad \text{이다.}$$

따라서 $15 < x \leq 24$ 이다.

그러므로 노트는 최소로 16 개, 최대로 24 개 살 수 있다.

따라서 $a = 16$, $b = 24$ 이다.

$$\therefore 16 \times 24 = 384$$

19. 8% 의 소금물 200 g 이 있다. 여기에 x g 의 소금을 섞어서 10% 이상 20% 미만의 농도를 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{40}{9} \leq x < 30$

해설

8% 의 소금물 200 g 의 소금의 양은

$$\frac{8}{100} \times 200 = 16 \text{ (g) 이다.}$$

따라서 소금 x g 을 추가하였을 때의 농도를 나타내면 $\frac{16+x}{200+x} \times 100$ 이다.

이 값이 10% 이상 20% 미만이므로,

$$10 \leq \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20 \text{ 이고,}$$

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \leq \frac{16+x}{200+x} \times 100 \\ \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \geq \frac{40}{9} \\ x < 34 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $\frac{40}{9} \leq x < 30$ 이다.

20. 부등식 $ax^2 + bx + a^2 > 2$ (a, b 는 실수) 의 해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$ax^2 + bx + a^2 - 2 > 0 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 인 이차부등식은

$$\{x - (1 - \sqrt{2})\} \{x - (1 + \sqrt{2})\} < 0$$

$$\text{즉, } x^2 - 2x - 1 < 0 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 부등호의 방향이 같으려면

$a < 0$ 이어야 한다.

$$\textcircled{㉡} \text{의 양변에 } a \text{ 를 곱하면 } ax^2 - 2ax - a > 0$$

$\textcircled{㉠}$ 과 일치하여야 하므로

$$b = -2a, \quad a^2 - 2 = -a$$

$$a^2 - 2 = -a \text{ 에서 } (a - 1)(a + 2) = 0$$

그런데, $a < 0$ 이므로 $a = -2, b = 4$

$$\therefore 2a - b = -8$$

21. 부등식 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 과 $2x^2 + (a - 8)x - 4a < 0$ 을 동시에 만족하는 정수인 x 의 값이 0뿐 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \leq a \leq 2$

② $0 \leq a < 2$

③ $0 < a \leq 2$

④ $-1 < a \leq 0$

⑤ $-1 \leq a < 0$

해설

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) > 0$$

$$\therefore x > 3 \text{ 또는 } x < 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x^2 + (a - 8)x - 4a$$

$$= (2x + a)(x - 4) < 0$$

한편, 만족하는 해가 0뿐이므로

$$-\frac{a}{2} < 4$$

$$\therefore -\frac{a}{2} < x < 4 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{과 } \textcircled{2} \text{에 의하여 } -1 \leq -\frac{a}{2} < 0$$

$$\therefore 0 < a \leq 2$$

22. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근은 -1 과 0 사이에 있고, 다른 근은 0 과 2 사이에 있을 때 정수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - a + b > 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(0) = b < 0 & \dots \textcircled{2} \\ f(2) = 4 + 2a + b > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

① $\times 2 +$ ③ 하면 $6 + 3b > 0$

$$\therefore b > -2$$

이것과 ②에서 $-2 < b < 0$

$$\therefore b = -1 (\because b \text{는 정수})$$

이 값을 ①, ③에 대입하면

$$1 - a - 1 > 0, 4 + 2a - 1 > 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < 0$$

$$\therefore a = -1 (\because a \text{는 정수})$$

$$\therefore a = -1, b = -1, a + b = -2$$

23. 이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서
 $(x-2)(x-5) = 0 \therefore x = 2$ 또는 $x = 5$

$f(x) = x^2 - 6x + k$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의

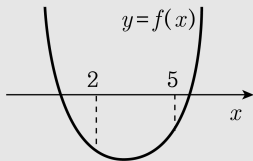
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.

따라서 $f(2) < 0$, $f(5) < 0$ 이므로

$$f(2) = -8 + k < 0 \text{에서 } k < 8$$

$$f(5) = -5 + k < 0 \text{에서 } k < 5$$

$\therefore k < 5 \therefore$ 정수 k 의 최댓값은 4 이다.



24. 네 점 $A(-2, 3)$, $B(3, a)$, $C(b, 4)$, $D(2, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$\square ABCD$ 가 마름모이므로
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ 이다.

따라서 점 D 는 점 A 를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C 도 점 B 를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore (3 + 4, a + 5) = (b, 4)$$

$$\therefore a = -1, b = 7$$

$$\therefore a + b = 6$$

25. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점의 좌표는?

- ① (-3, -7) ② (-2, -5) ③ (3, 5)
 ④ (2, 3) ⑤ (3, 2)

해설

직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점을 P(a, b)라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$

$$12a - 8b = 20$$

$$\therefore 3a - 2b = 5 \dots\dots ①$$

또, 점 P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 1 \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
 A(-2, 1), B(4, -3)의 수직이등분선 위에 있다.

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{1+3}{-2-4} = -\frac{2}{3}$ 이므로

수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$, A(-2, 1), B(4, -3)의 중점 (1, -1)
 를 지나므로

$$\therefore y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \dots\dots ①$$

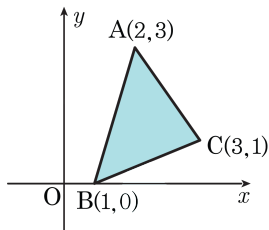
구하는 점 P는 $y = 2x - 1$ 과 ①의 교점이다.

연립하여 풀면 $x = -3, y = -7$

$$\therefore P(-3, -7)$$

26. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

- ① $-1 \leq m \leq 3$ ② $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$
 ③ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ ④ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$
 ⑤ $1 \leq m \leq 3$



해설

직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x+1) + y - 2 = 0$ 이므로
 점 $P(-1, 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가
 $\triangle ABC$ 를 지나기 위한 기울기 $-m$
 의 범위는

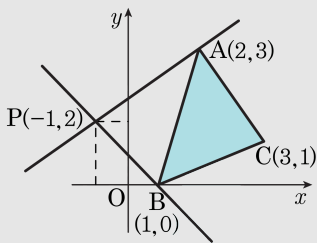
(직선 PB 의 기울기) $\leq -m \leq$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2} = \frac{1}{3}$

$-1 \leq -m \leq \frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$



27. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x - y + 2 - k(x + y) = 0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{\sqrt{2}}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3 - k)x - (1 + k)y + 2 = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3 - k)^2 + (1 + k)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$$2k^2 - 4k + 10 = 2(k - 1)^2 + 8 \geq 8 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{최대값 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

28. 직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동시켰더니 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 = 0$ 의 공통현을 품는 직선이 되었다. 이 때, $m + k$ 의 값은 ?

- ① 2 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

해설

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $y = 2x - 2m$
두 원의 공통현을 품는 직선을 구하면

$$x^2 + y^2 + 4x - ky + 1 - (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$4x - ky + 10 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

그런데 ①과 $2x - y - 2m = 0$ 은 일치해야 하므로

$$\frac{4}{2} = \frac{-k}{-1} = \frac{10}{-2m}$$

$$\therefore k = 2, m = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore m + k = -\frac{1}{2}$$

29. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d 가 2 이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26

30. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18

② 18

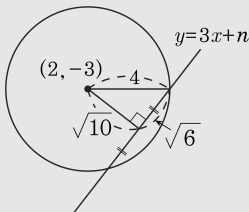
③ -22

④ 22

⑤ 0

해설

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2 \text{ 이고}$$



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2 \text{ 에 따라서 } \sqrt{10}$$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2, -3)$ 의 거리

$$\frac{|6 + 3 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|9 + n| = 10$$

$$\therefore n = \pm 10 - 9 = 1 \text{ or } -19$$

$$\therefore 1 - 19 = -18$$

31. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33

② 35

③ 45

④ 49

⑤ 55

해설

점 $(3, -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을

$$y + 1 = m(x - 3) \text{ 이라 하자.}$$

이 때, 원의 중심에서 직선 $y + 1 = m(x - 3)$,

즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m + 1| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, (2m - 1)(m + 2) = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

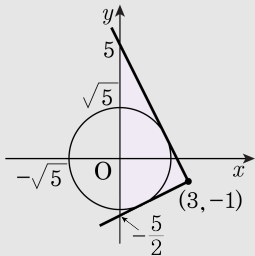
즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 4S = 45$$



32. 두 점 A(-3, 0), B(1, 0)으로 부터의 거리의 비가 3 : 1인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 3\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 놓으면

$$(x+3)^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을

H라 하면

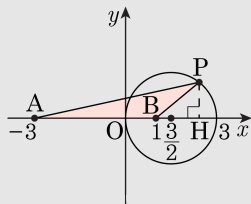
$$\Delta PAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$$

이 때, $\overline{AB} = 4$ 이고 $\overline{PH}$

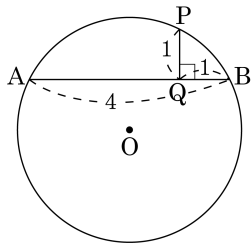
의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$$



33. 다음 그림과 같이 한 원 O의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{PQ} = \overline{BQ} = 1$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{PQ}$ 의 연장선과 원 O의 교점을 P' 이라 하면

$$\overline{P'Q} = 3 \quad (\because \overline{PQ} \cdot \overline{P'Q} = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ})$$

또, 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$, $\overline{PP'}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M이라 하면
원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로

$$\overline{NB} = \overline{PM} = 2$$

따라서 $\overline{NQ} = \overline{QM} = 1$ 이 되므로

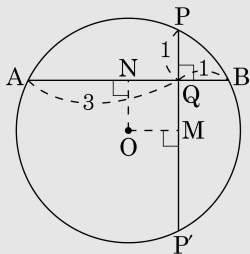
□OMQN은 정사각형이다.

$$\therefore \overline{OM} = 1, \overline{PM} = 2$$

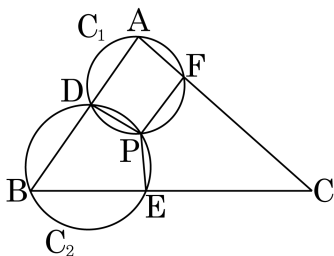
그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$r^2 = 5$$



34. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180^\circ$$

$$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180^\circ$$

$$\angle DPF + \angle DPE = 360 - (\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}) \text{ 에서}$$

$$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$$

$$\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\text{다}}$

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.
 ② (가) $\angle B$, (나) $\angle A$, (다) C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.
 ③ (가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.
 ④ (가) $\angle B$, (나) $\angle A$, (다) C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.
 ⑤ (가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

$$\square ADPF \text{ 에서 } \angle DPF + \angle A = 180^\circ$$

$$\square BEPD \text{ 에서 } \angle DPE + \angle B = 180^\circ$$

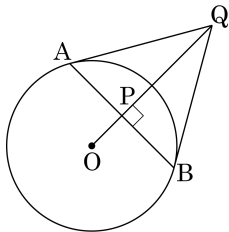
$$\text{따라서 } \angle DPF + \angle DPE = 360^\circ - (\angle A + \angle B)$$

$$\angle FPE = \angle A + \angle B$$

$$\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할 때,
 세 원 C_1, C_2, C_3 는 한 점 P 에서 만난다.

35. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고
 $\angle OPA = 90^\circ$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$$\therefore \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \frac{75}{5} = 15$$

