

1. $a > b > 1$ 인 실수 a, b 에 대하여 다음 중 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ② $\frac{a}{1-a} > \frac{b}{1-b}$ ③ $a+3 < b+3$
④ $a-1 < b-1$ ⑤ $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

해설

① 양변에 ab 를 곱하면 주어진 조건과 다르게 나온다.
② $1-a < 0, 1-b < 0$ 에서 $(1-a)(1-b) > 0$ 이므로
 양변에 $(1-a)(1-b)$ 를 곱하면
 $a(1-b) > b(1-a), a-ab > b-ab, a > b$
 주어진 조건에 만족한다.
③ 양변에 3을 빼주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.
④ 양변에 1을 더해주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.
⑤ $1+a > 0, 1+b > 0$ 이므로 $(1+a)(1+b)$ 를 양변에 곱하면
 $a(1+b) < b(1+a)$
 $a+ab < b+ab$
 $a < b$
 주어진 조건을 만족하지 않는다.

2. $0 < a < b$ 인 실수, a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} & \textcircled{2} \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} \\ \textcircled{3} \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b} & \textcircled{4} \frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b} \\ \textcircled{5} \frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} & \end{array}$$

해설

$$0 < a < b \text{에서 } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \cdots \textcircled{\textcircled{1}}$$

$\textcircled{\textcircled{1}}$ 의 양변에 1을 더하면

$$\frac{1}{a} + 1 > \frac{1}{b} + 1, \quad \frac{1+a}{a} > \frac{1+b}{b} \cdots \textcircled{\textcircled{2}}$$

따라서 $\textcircled{\textcircled{2}}$ 의 역수를 취하면 $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

3. $-2 \leq x \leq 3$ 일 때, $3x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$-2 \leq x \leq 3 \text{에서 } -6 \leq 3x \leq 9, \quad -7 \leq 3x - 1 \leq 8$$

따라서, 최댓값은 8이고 최솟값은 -7이므로 두 값의 합은 1이다.

4. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, $\frac{20}{3-x}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$$-2 \leq x \leq 2 \text{에서}$$

$$-2 \leq -x \leq 2,$$

$$1 \leq 3-x \leq 5$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3-x} \leq 1$$

$$\therefore 4 \leq \frac{20}{3-x} \leq 20$$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 24

5. 부등식 $3x + 2 \geq 8$ 을 풀면?

① $x \geq -2$

② $x \geq -1$

③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$

⑤ $x \geq 2$

해설

$3x + 2 \geq 8, 3x \geq 6 \therefore x \geq 2$

6. 두 실수 a , b 에 대하여 부등식 $ax > b$ 의 해가 $x < -2$ 일 때, 부등식 $bx > 2a + 4b$ 의 해는?

- ① $x > 0$ ② $x > 1$ ③ $x > 2$ ④ $x > 3$ ⑤ $x > 4$

해설

부등식 $ax > b$ 의 해가 $x < -2$ 로 부등호의 방향이 바뀌었으므로

$$a < 0$$

$$\textcircled{a} \text{ 때, } x < \frac{b}{a} \text{에서 } \frac{b}{a} = -2 \therefore b = -2a$$

따라서 $bx > 2a + 4b$ 에서 $b = -2a$ 를 대입하면

$$-2ax > 2a + 4 \cdot (-2a)$$

$$-2ax > -6a$$

$a < 0$ 에서 $-2a > 0$ \textcircled{b} 므로

$$x > \frac{-6a}{-2a} \therefore x > 3$$

7. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A > B > 0, C > D > 0$ 이면 $AC > BD$ 이다.

② $A > B, C > D$ 이면 $A + C > B + D$ 이다.

③ $A > B > 0$ 이면 $A^2 > B^2$ 이다.

④ A > B이면 $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ 이다.

⑤ $A > 0 > B$ 이면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 이다.

해설

④ 만약 $B < 0 < A$ 인 경우라면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 가 되어 주어진 문장은 틀린다.

8. $-1 < x < 3$ 일 때, $A = 2x - 3$ 의 범위는?

- ① $1 < A < 3$ ② $-1 < A < 3$ ③ $-3 < A < 5$
④ $-5 < A < 3$ ⑤ $3 < A < 5$

해설

$-1 < x < 3$ 에서 양변에 2를 곱하고 3을 빼면

$$-2 - 3 < 2x - 3 < 6 - 3$$

$$\therefore -5 < 2x - 3 < 3$$

9. $2 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq a$ 일 때, $x+y$ 의 범위가 xy 의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a 의 최솟값은? (단, $a \geq 1$)

① 1 ② $\frac{8}{7}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \leq x+y \leq 5+a$, $2 \leq xy \leq 5a$ 이므로

$3 \leq x+y \leq 5+a$,

이때 $x+y$ 의 범위가 xy 의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \leq 5a$ 이어야 하므로 $4a \geq 5$

$\therefore a \geq \frac{5}{4}$

10. x 에 대한 부등식 $x+2 \leq ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+2 \leq ax+3$ 에서 $(1-a)x \leq 1$ 이 부등식의 해가 모든 실수이고
우변이 양수이므로 x 의 계수는 0이어야 한다.

$$1-a=0$$

$$\therefore a=1$$

11. 부등식 $ax - b^2 > bx + a^2 - 8$ 의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은?
(a, b 는 실수)

- ① $a = b \wedge -1 < a < 1$ ② $a = b \wedge -2 < a < 2$
③ $a = b \wedge -3 < a < 3$ ④ $a = b \wedge -4 < a < 4$
⑤ $a = b \wedge -5 < a < 5$

해설

$$ax - b^2 > bx + a^2 - 8 \text{에서}$$
$$(a - b)x - b^2 - a^2 + 8 > 0 \text{이} \Rightarrow \text{모든 } x \text{에 대해서 성립해야 하므로}$$
$$a = b$$
$$\therefore -2a^2 + 8 > 0 \quad 2a^2 < 8$$
$$\therefore a^2 < 4 \text{이므로 } -2 < a < 2$$
$$\therefore a = b \text{이고 } -2 < a < 2$$

12. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m 의 값의 합은?

$$m^2x - 1 > m(x - 1)$$

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$m^2x - 1 > m(x - 1) \text{에서}$$

$$m^2x - 1 > mx - m$$

$$\therefore (m^2 - m)x > 1 - m \cdots \textcircled{1}$$

①의 해가 없어야 하므로

$$m^2 - m = 0, 1 - m \geq 0$$

$$m^2 - m = 0 \text{에서 } m(m - 1) = 0$$

$$\therefore m = 0 \text{ 또는 } 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$1 - m \geq 0 \text{에서 } m \leq 1 \cdots \textcircled{3}$$

따라서 ①, ③에서 $m = 0$ 또는 $m = 1$

13. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $k^2x+1 > 2kx+k$ 가 성립할 때, k 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} k^2x + 1 &> 2kx + k \text{에서} \\ (k^2 - 2k)x &> k - 1, \\ k(k - 2)x &> k - 1 \\ \text{해가 모든 실수이므로} \\ k(k - 2) &= 0, k - 1 < 0 \text{이어야 한다.} \\ \therefore k &= 0 \end{aligned}$$

14. $ax + b > 0$ 의 해가 $x < 2$ 일 때, $(a+b)x < 5b$ 의 해는?

- ① $x > 5$ ② $x > 10$ ③ $x < 1$
④ $x < 5$ ⑤ $x < 10$

해설

$$ax + b > 0 \text{에서 } ax > -b$$

해가 $x < 2$ 이므로

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{①}}$$

$$-\frac{b}{a} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{②}}$$

$$\textcircled{\text{②}}\text{을 정리하면 } b = -2a \quad \dots\dots \textcircled{\text{③}}$$

\textcircled{\text{③}}에서 $b = -2a$ 를 $(a+b)x < 5b$ 에 대입하면

$$(a - 2a)x < 5 \cdot (-2a), \quad -ax < -10a$$

$$\textcircled{\text{①}}\text{에서 } a < 0 \text{이므로 } x < 10$$

15. x 에 대한 부등식 $(a+b)x + a - 2b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 일 때, x 에 대한
부등식 $(b-3a)x + a + 2b > 0$ 의 해는?

- ① $x < -10$ ② $x < -5$ ③ $x > -5$
④ $x < 5$ ⑤ $x > 5$

해설

$$(a+b)x + a - 2b > 0 \quad | \quad (a+b)x > -a + 2b \cdots ⑦$$

⑦의 해가 $x < 1$ 이려면 $a+b < 0 \cdots ⑧$

⑧의 양변을 $a+b$ 로 나누면 $x < \frac{-a+2b}{a+b}$ 이므로

$$\frac{-a+2b}{a+b} = 1, \quad -a+2b = a+b$$

$$\therefore 2a = b \cdots ⑨$$

⑨을 ⑧에 대입하면 $a+2a=3a<0 \therefore a<0$

⑨을 부등식 $(b-3a)x + a + 2b > 0$ 에 대입하면

$$(2a-3a)x + a + 4a > 0, \quad -ax > -5a \quad \therefore x > 5$$

16. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.
- ② $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 이다.
- ③ $a > b > 0$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.
- ④ $a > b, c > d$ 이면 $ac > bd$ 이다.
- ⑤ $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ 이다.

해설

- ④ $a > b, c > d$ 이면 $ac > bd$
반례 : a, b, c, d 가 음수인 경우는 $ac < bd$

17. $abc < 0$, $\frac{a-b}{c} > 0$ 인 세 실수 a , b , c 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $c > 0$ 이면 $a > b$ 이다. ② $a > 0$ 이면 $c < 0$ 이다.

③ $a > b$ 이면 $b < 0$ 이다.

④ $a > b$ 이면 $a > 0$ 이다.

⑤ $a < b$ 이면 $ab > 0$ 이다.

해설

① $c > 0$ 이면, $\frac{a-b}{c} > 0$ 에서 $a-b > 0 \Rightarrow a > b$

② $a > 0$ 이면, $b < 0$, $c > 0$ 일 때도 두 부등식이 성립하므로 $c < 0$ 라고 말할 수 없다.

③, ④ $a > b$ 이면, $\frac{a-b}{c} > 0$ 에서 $c > 0$ 이므로 $ab < 0$ 이다.

따라서, $a > b$, $ab < 0$ 에서 $a > 0$, $b < 0$ 이다.

⑤ $a < b$ 이면, $\frac{a-b}{c} > 0$ 에서 $c < 0$ 이다.

따라서, $ab > 0$

18. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- Ⓐ $a > b, b > c, c > d \Rightarrow a > d$
- Ⓑ $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- Ⓒ $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$
- Ⓓ $ac > bc \Rightarrow a > b$

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

- Ⓐ $a > b, b > c \Rightarrow a > c$
 $a > c, c > d \Rightarrow a > d$ (참)
- Ⓑ $a > b > 0 \Rightarrow a - b > 0, ab > 0$ 이다.
 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a-b}{ab} > 0 \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (참)
- Ⓒ $c > d \Rightarrow a > 0 \Rightarrow ac > ad$
 $a > b \Rightarrow d > 0 \Rightarrow ad > bd$
따라서 $ac > bd$ (참)
- Ⓓ $c < 0$ 일 때 $ac > bc \Rightarrow a < b$ 이다. (거짓)

19. $-2 \leq x \leq -1$ 일 때, $A = \frac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \leq A \leq q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$-2 \leq x \leq -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \leq -x \leq 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \leq 2-x \leq 4$

각 변의 역수를 취하면 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{3}$

각 변에 12를 곱하면 $3 \leq \frac{12}{2-x} \leq 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

20. $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 일 때, 부등식 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 을 풀어라.

▶ 답:

▷ 정답: $x < -3$

해설

$$\begin{aligned} (a+b)x + (2a-3b) &< 0 \\ (a+b)x &< 3b - 2a \\ \Rightarrow x &< \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3} \quad (a+b > 0) \\ \Rightarrow a+b &= -3(3b-2a) \\ \Rightarrow a &= 2b, \quad a+b = 3b > 0 \rightarrow b > 0 \\ (a-3b)x + (b-2a) &> 0 \Leftrightarrow -bx - 3b > 0 \\ bx &< -3b \\ \therefore x &< -3 \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

21. 부등식 $bx + (a - b) < 0$ 의 해가 $x > 2$ 일 때, 부등식 $ax + 2a - b > 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x > -1$ ② $x < -1$ ③ $x > -2$
④ $x < -2$ ⑤ $x > -3$

해설

$bx + (a - b) < 0$ 의 해가 $x > 2$ 이려면

$b < 0 \dots\dots \textcircled{\text{R}}$

$$\frac{b-a}{b} = 2 \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

$\textcircled{\text{L}}$ 에서 $b - a = 2b \therefore a = -b$

$\textcircled{\text{R}}$ 에서 $b < 0$ 이므로 $a > 0$

$ax + 2a - b > 0$ 에서 $ax + 2a + a > 0 \therefore ax > -3a$

$a > 0$ 이므로 $x > -3$

22. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진
순서쌍 (x, y) 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때,
 $M + 2m$ 의 값을 구하면?

① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$$\begin{aligned} 1 &< x + 5y < 5 \quad \textcircled{\text{①}} \\ -2 &< 2x + 7y < 3 \quad \textcircled{\text{②}} \\ \textcircled{\text{①}} \times (-2) + \textcircled{\text{②}} &\text{을 하면} \\ -10 &< -2x - 10y < -2 \quad \textcircled{\text{③}} \\ -2 &< 2x + 7y < 3 \quad \textcircled{\text{④}} \\ \textcircled{\text{③}} + \textcircled{\text{④}} &= -12 < -3 < 1 \end{aligned}$$

$$\text{그러므로, } -\frac{1}{3} < y < 4$$

그런데, y 는 정수이므로 $y = 0, 1, 2, 3$

이것을 $\textcircled{\text{①}}, \textcircled{\text{②}}$ 에 대입하여 적합한 x 의 값을 구하면

$$(x, y) = (-3, 1), (-6, 2), (-7, 2), (-11, 3)$$

따라서, $x + y$ 의 최댓값은 $-3 + 1 = -2$ 이고,

최솟값은 $-11 + 3 = -8$ 이다.

$$\therefore M = -2, m = -8 \quad \therefore M + 2m = -18$$

23. 함수 $f(x) = ax + b$ 가 $2 \leq f(1) \leq 4$, $0 \leq f(2) \leq 3$ 을 만족할 때, $f(3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(1) = a + b, f(2) = 2a + b$$

$$f(3) = 3a + b \quad \text{으로 } f(3) = 2f(2) - f(1)$$

$$\text{조건에서 } 2 \leq f(1) \leq 4 \quad \dots \textcircled{①}$$

$$0 \leq f(2) \leq 3 \quad \dots \textcircled{②}$$

$$\textcircled{①} \text{에서 각 변에 } -1 \text{을 곱하면}$$

$$-4 \leq -f(1) \leq -2 \quad \dots \textcircled{③}$$

$$\textcircled{②} \text{에서 각 변에 2를 곱하면}$$

$$0 \leq 2f(2) \leq 6 \quad \dots \textcircled{④}$$

$$\therefore -4 \leq f(3) \leq 4$$

따라서, $f(3)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 -4이다.

24. $a < 0$ 이고 $a + b = 0$ 일 때, 부등식 $(a - b)x - a - 2b < 0$ 의 해는?

- ① $x < -\frac{1}{2}$ ② $x > -\frac{1}{2}$ ③ $x > 2$
④ $x < -2$ ⑤ $x > 1$

해설

$a + b = 0$ 에서 $b = -a$ 를 부등식에 대입하면

$$(a + a)x - a + 2a < 0, \quad 2ax + a < 0, \quad 2ax < -a$$

$$\therefore x > -\frac{1}{2} (\because 2a < 0)$$

25. x 에 관한 부등식 $(a+2b)x+a-b < 0$ 의 해가 $x > 1$ 일 때, x 에 관한 부등식 $(a-b)x+2a-b > 0$ 을 풀면?

① $x > \frac{1}{3}$ ② $x < \frac{1}{3}$ ③ $x > -\frac{4}{3}$
④ $x < -\frac{4}{3}$ ⑤ $x > \frac{7}{3}$

해설

$$a+2b < 0, \frac{-(a-b)}{a+2b} = 1$$

$$\therefore b = -2a \text{ } \circ| \text{므로}$$

$$(a-b)x + 2a - b = a(3x + 4) > 0$$

$$a > 0 \text{ } \circ| \text{용하면}$$

$$\therefore 3x + 4 > 0 \quad \therefore x > -\frac{4}{3}$$